

جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

هندسه

سال اول
آموزش متوسطهٔ عمومی
علوم تجربی و ریاضی

۲۱۰

بسم الله الرحمن الرحیم

هندسه

سال اول

آموزش متوسطهٔ عمومی

علوم تجربی و ریاضی

مؤلفان ● احمد بیرشک ● محمد طاهر معیری

صفحه پرداز حسن صالحی علائی

چاپ از چاپ شرکت افست «سهامی عام»

۱۳۶۷



تهران ــ کیلومتر ۱۵ جاده مخصوص کرج
خیابان داروپخش ــ تلفن: ۴ ــ ۹۴۱۱۵۱

فهرست

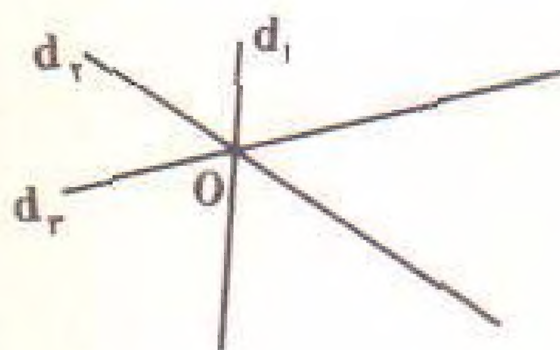
فصل اول

مقدمات

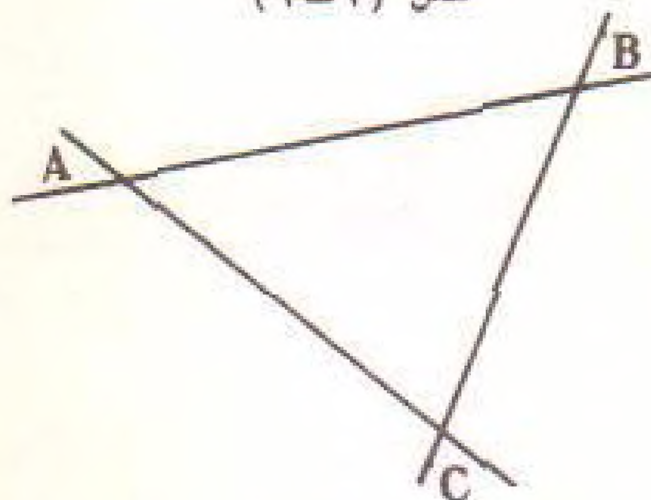
(۱-۱) - تعریف - تعریف یعنی شناساندن. برای شناساندن هرچیز صفات مشخص کنندهٔ آن را بیان می‌کنیم. چنان که می گوییم، مدرسه جایی است که در آن گروهی از کودکان یاجوانان در سنین‌معین به‌تحصیل و آموختن برنامه‌های خاص‌می‌پردازند. یاآن‌که، پل‌ساختمانی است که بر روی مجرای آب بنا می‌شود تا ازروی‌آن‌ازیك طرف به طرف دیگر می‌توان رفت.

تعریف‌هرچیزشامل‌مجموعهٔ‌مشخصاتی‌است که‌برای شناخته‌شدن آن چیز بیان‌می‌شوند.

تعریف هر چیز باید صفات و خصوصیات آن را به آن اندازه که برای شناخته شدنش لازم و کافی هستند شامل باشد، نه بیشتر و نه‌کمتر. چنان‌که اگر بگوییم «مثلث شکلی است که از برخورد سه‌خط به وجود می‌آید.» تعریف کامل نیست، زیرا با این بیان مثلث شناخته نمی‌شود و طبق آنچه در شکل (۱-۱) دیده می‌شود سه خط ممکن است برخورد کنند و مثلث به وجود نیاید. و اما اگر، بگوییم: «مثلث شکلی است که از سه خط که دو به دو یکدیگر را در سه نقطهٔ متمایز قطع کنند به وجود می‌آید.» مثلث شناخته می‌شود. زیرا مطابق آنچه در شکل (۱-۲) دیده می‌شود، ممکن نیست که سه خط دو به‌دو یکدیگر را درسه‌نقطهٔ متمایز قطع کنند و مثلث به وجودنیاید. پس تعریف اخیر در نوع خود کامل است.



شکل (۱-۱)



شکل (۱-۲)

و نیز می‌توان گفت: «مثلث شکلی است که از سه خط که دو به دو یکدیگر را در سه نقطهٔ متمایز قطع می‌کنند، و در یك صفحه واقعند، و سه زاویه تشکیل می‌دهند، به وجود می‌آید.»

این تعریف نیز مثلث را می‌شناساند و اما چند جزء زاید دارد که می‌توان آنها را حذف

گرد . یعنی ذکر آنها در تعریف مثلث ضرورتی ندارد . زیرا سه خط که دو به دو در سه نقطهٔ متمایز متقاطع باشند ، لزوماً در یك صفحه واقعند و از برخورد آنها سه زاویه به وجود می‌آیند. پس بیان این دو قسمت به عنوان جزئی از تعریف مثلث ، هرگز لازم نیست .

تعریف خوب ودرست آن است که از توضیح اضافی بی‌نیاز باشد و حذف هیچ جزئی از آن ممکن نباشد . بعبارت دیگر، تعریف باید جامع و مانع باشد .

(۱ – ۲) – تعریف نشده‌ها (مفهومهای نخستین) – آنچه راکه با درك وتصور کردن ویا ازطریق مشاهده، شناخته و بدون تعریف پذیرفته می‌شود یك مفهوم نخستین و یا یك مفهوم تعریف نشده می‌نامیم .

برای نام بردن مفهومهای تعریف نشدنی کلماتی به کار می‌بریم که آنها را **اصطلاحهای نخستین** می گوییم .

در هرشاخه از علم از قبول اصطلاحهای نخستین گزیری نیست . در هندسه نیز مانند هرعلم دیگر ، بعضی مفاهیم را بدون آن‌که تعریف کنیم شناخته شده می‌پذیریم و برای نام بردن آنها از اصطلاحهای نخستین استفاده می کنیم . مانند نقطه ، خط ، صفحه ، فضا .

(۱–۳) برهان – برهان درحقیقت ازگزاره‌هایی‌که هر یك نتیجهٔ دیگری است حاصل می‌شود ، به این معنی که عمل ذهن در برهان براین‌اساس است‌که از یك سلسله‌گزاره‌های قبلی درست به‌گزاره‌هایی می‌رسد که درستی آنها را برمبنای آنچه‌قبلا پذیرفته‌است می تواند قبول کند، و به همین ترتیب پیش می‌رود تا به نتیجهٔ مورد نظر خود برسد و درستی‌آن را بپذیرد .

(۱–۴) – قضیه – هرگزاره که درستی‌آن نیازمند برهان باشد ، قضیه نامیده می‌شود .

هرقضیه شامل دو قسمت است . قسمت اول : گزاره یـا گزاره‌هایی که درست بودن آنها را قبول داریم ، این قسمت را **فرض قضیه** می گوییم . قسمت دوم : گزاره‌هایی که درست بودن آنها را باید از فرض نتیجه گرفت ، این قسمت را **نتیجه یا حکم** می‌نامیم .

اثبات یك قضیه عبارت است از ارائهٔ دلیل و پذیرفتن درستی نتیجه برمبنای فرض و با استناد به گزاره‌هائی که درستی آنها قبلاً ثابت شده باشد .

(۱ – ۵) – اصل متعارف و اصل موضوع – می‌دانیم که در برهان برای قبول هرنتیجه به‌گزاره‌هایی استناد می کنیم که درستی آنها قبلاً بر ما مسلم شده باشد . اما وقتی درستی هرگزاره رابردرستی گزاره‌های قبلی بنا می کنیم بالاخره به‌گزاره‌ای می‌رسیم که درستی‌آن به نحوی بر ما مسلم است ولی بر گزاره دیگری بنا نشده است ، زیرا پیش از آن گزاره‌ای

ثابت نشده است که در قبول درستی این گزاره به‌آن استناد کنیم. بنابراین در برهان هم، مانند مفهومهای نخستین، بعضی گزاره‌های اولیه مورد استفاده قرار می‌گیرند که درستی آنها را بدون برهان می‌پذیریم. همان طور که مفهومهای نخستین را بدون آن که تعریف کنیم شناخته شده، پذیرفته‌ایم.

پاره‌ای از این گزاره‌های اولیه آنهائی هستند که درستی آنها از طریق تجربه و مشاهده بدیهی و روشن است و ذهن آدمی غیر از آن را اصولا نمی‌تواند تصور کند. این گونه گزاره‌های اولیه را بدیهیات یا اصول متعارف می‌گوییم. اصول متعارف معمولا در همهٔ شاخه‌های مختلف علم مورد قبولند.

در هندسه‌ای که اقلیدس دانشمند یونانی تنظیم کرده است برخی از اصلهای متعارف یا بدیهیات عبارتند از:

۱ ـ دو چیز مساوی با یك چیز، مساوی یکدیگرند.

۲ ـ اگر مقادیر مساوی را با مقادیر مساوی دیگر جمع کنیم حاصل جمعها با یکدیگر مساوی خواهند بود.

۳ ـ اگر دو مقدار مساوی را از دو مقدار مساوی دیگر تفریق کنیم، مانده‌ها با یکدیگر مساوی خواهند بود.

در هر شاخه از علم گزاره‌های اولیهٔ دیگری وجود دارند که درستی آنها را نیز بدون برهان می‌پذیریم و گزاره‌های بعدی را بر قبول آنها بنا می‌کنیم. این‌گونه گزاره‌های اولیه اصول موضوع نامیده می‌شوند. مانند اصل موضوع توازی: از هر نقطه خارج یك خط یك و تنها یك خط می‌توان بموازات آن خط رسم نمود.

امروز تمایل برآن است که اصلهای متعارفی و موضوع از هم تفکیك نشوند و همه اصل موضوع نامیده شوند[1].

تمرین

فرق بین یك قضیه و یك اصل را بیان کنید.

---

۱ ـ رنه‌دکارت ریاضی‌دان بزرگ بررسیهای خود را بر دو اصل اساسی زیر بنیاد کرده بود:

الف ـ هیچ‌چیز را بی‌آن‌که درستی آن مسلم شود نباید پذیرفت.

ب ـ برای اثبات درستی چیزی باید به مطالبی استناد کرد که درستی آنها قبلا مسلم شده باشد. یا آنها را به عنوان اصل موضوع پذیرفته باشیم.

۲- برخی از تعریف نشده‌ها و اصلهای هندسه اقلیدسی

(۲ ـ ۱) ـ نقطه ـ نقطه را به صورت مفهوم ذهنی می‌شناسیم و بعنوان یک اصطلاح نخستین (تعریف نشده) می‌پذیریم.

اگر نوك قلم یا سوزنی را اندکی روی کاغذ فشار دهید، اثری از آن باقی خواهد ماند که تصور یا نمایش یك نقطه است.

در هندسه نقطه را با یك حرف مشخص می کنیم ومثلاً می گوییم نقطهٔ M یا نقطهٔ A .

(۲ ـ ۲) . خط راست ـ خط راست را نیز بصورت یك اصطلاح نخستین (تعریف نشده) می‌پذیریم . یك برگ کاغذ را تا کنید و پس از دست کشیدن برمحل تا خوردگی آن را بازکنید، اثر تای کاغذ نمایش یك خط راست است (شکل ۱-۳) . حال دو نقطه متمایز A و B روی کاغذ درنظر گرفته برگ‌کاغذ را چنان تا کنید که هردو نقطه مزبور برمحل تای کاغذ قرار گیرند . وقتی کاغذ را باز می کنید روی آن اثری به صورت یك خط راست می‌بینید که هر دو نقطه A و B را شامل است .

اصل ۱ ـ هر دو نقطه متمایز یك خط راست و تنها یك خط راست را مشخص می‌کنند .

هر خط راست را با دو نقطه متمایز آن می‌توان نمایش داد . خط راستی را، که بر دو نقطه متمایز A و B می گذرد با نماد AB نمایش می‌دهند (شکل ۱-۴) .

خط را گاهی با یك حرف کوچك هم نمایش می‌دهند، مانند خط d در شکل (۱-۵) .



شکل (۱-۳)



شکل (۱-۴)



شکل (۱-۵)

اگر نوك قلم را بر صفحه کاغذ در لبهٔ یك خط کش به آرامی حرکت دهیم، اثر به دست آمده تصور یا نمایش بخشی از خط راست است .

اصل ۲ ـ هر خط راست دست کم دارای دو نقطه متمایز است : حداقل سه نقطه وجود دارد که بر یك خط راست واقع نیستند .

اصل ۳ — بین هر دو نقطه متمایز از یك خط راست می‌توان نقطه‌ای متمایز از آن دو بدست آورد .

قرارداد ـ در هندسه هر وقت به طور مطلق « خط » بگوییم یا بنویسیم مراد ما « خط راست » است .

تعریف ـ دو خط راست که فقط در یك نقطه مشترك باشند ، متقاطع‌اند .

تمرین

۱ ـ چند نمونه از نمایش نقطه در اتاق درس نشان دهید .

۲ ـ چند نمونه از نمایش خط نام ببرید . آیا همهٔ نمونه‌هایی که نام می‌برید خط راست هستند ؟

۳ ـ سه نقطهٔ متمایز A و B و C مفروضند . آیا این سه نقطه در همه حال یك خط راست مشخص می‌کنند ؟ در چه‌صورت یك خط راست را مشخص نمی‌کنند ؟ در این صورت چندخط مشخص می‌کنند ؟

۴ ـ بریك نقطهٔ مفروض A چند خط راست می‌گذرد ؟ چرا ؟

(۲-۳) ـ صفحه ـ مفهوم صفحه نیز از تعریف نشده‌ها است . صفحه یك تصور ذهنی است. صفحه کتاب ، سطح میز ، سطح تخته سیاه ، سطح قسمتی از دیوار اگر ناهمواری و پستی و بلندی نداشته باشند ، نمایشهایی از صفحه‌اند . برخی از اصلهای مربوط به‌صفحه را که بعداً با آنها نیاز خواهیم داشت به‌نحو دلخواه خود در زیر می‌نویسیم .

اصل ۱ — در هر صفحه دست کم سه نقطه غیرواقع بریك خط راست وجود دارد .

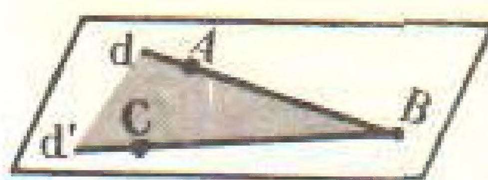
اصل ۲ — برهرسه‌نقطه‌غیرواقع بریك خط راست یك صفحه می‌گذرد.

اصل ۳ ـ اگر دو نقطه خطی ، در صفحه‌ای باشند ، تمام نقاط‌آن خط درآن صفحه‌اند .

چون صفحه با سه نقطه غیر واقع بر یك خط مشخص می‌شود و بر هر دو نقطه یك خط می‌گذرد می‌توان گفت که صفحه با سه نقطه غیر واقع بریك خط ، یایك خط و یك نقطه خارج خط ، و یا دو خط متقاطع مشخص می‌شود ؛ و صفحه را با نام آن نقاط یا خطوط می‌نامیم ، مانند : صفحهٔ ABC ، یا صفحهٔ (d , C) یا صفحهٔ (d , d') شکل (۱-۶) .

گاهی قسمتی از یك صفحه را به صورت متوازی‌الاضلاع نمایش داده و آن را با یك

حرف مشخص می کنیم. مانند صفحهٔ P درشکل (۱–۷).



شکل (۱–۶)



شکل (۱–۷)

(۲–۴) ـ فضا ـ فضا را نیز بصورت یك اصطلاح نخستین (تعریف نشده) می پذیریم و بمعنی وسیع ، همه عالم است ، با این تصور که از جمیع اشیاء آن صرفنظر شده باشد .

صفحه زیرمجموعه‌ای است از فضا .

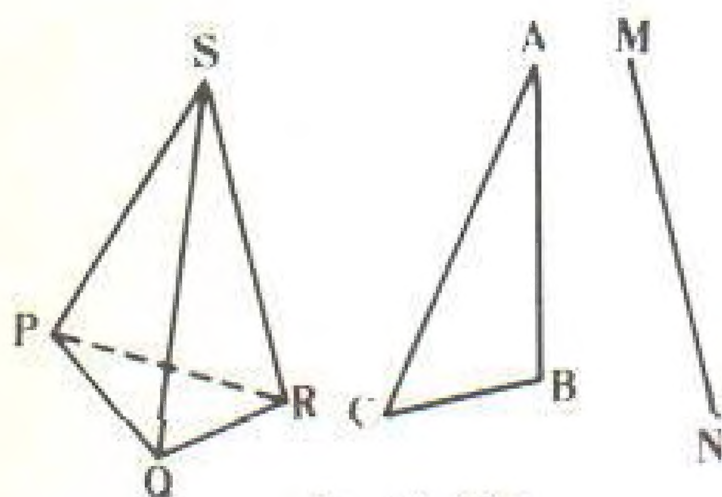
خط نیز زیرمجموعه‌ای است از فضا .

فضا را با اصول زیر می‌شناسیم :

اصل ۱ ـ فضا مجموعهٔ نامتناهی همهٔ نقاط است .

اصل ۲ ـ دست کم چهار نقطه غیر واقع بریك صفحه وجود دارند .

(۲–۵) ـ شکل ـ هر مجموعه ازنقاط را یك شکل می نامند ، شکلهائی که در هندسه مورد بررسی قرارمی گیرند، شکلهای هندسی می گویند . مانند خط MN ومثلث ABC وهرم SPQR در شکل (۱–۸) .



شکل (۱–۸)

اگر تمام نقاط یك شکل در یك صفحه باشند آن را یك شکل مسطح (مستوی) می نامند . از این پس هر شکل هندسی را باختصار شکل می‌نامیم .

(۲–٦)ـ سطح ـ سطح ازمفاهیم اساسی هندسه است و درهندسه مقدماتی تعریف دقیق ندارد . معمولا مرز بین هر جسم فیزیکی و فضا و یا قسمتی ازآن را سطح می نامند ، مانند سطح میز ، سطح دیوار ، سطح توپ و غیره .

فصل دوم

زاویه

۱ــ کلیات

(۱ ــ ۱) ــ نیم‌خط ـ نقطهٔ M را برخط راست d درنظرمی گیریم (شکل ۲ ــ ۱). این نقطه خط d را به دو نیم‌خط تقسیم می کند. نقطهٔ M را مبدأ یا آغاز هریک از دونیم‌خط مزبور می‌نامیم . بنابراین :

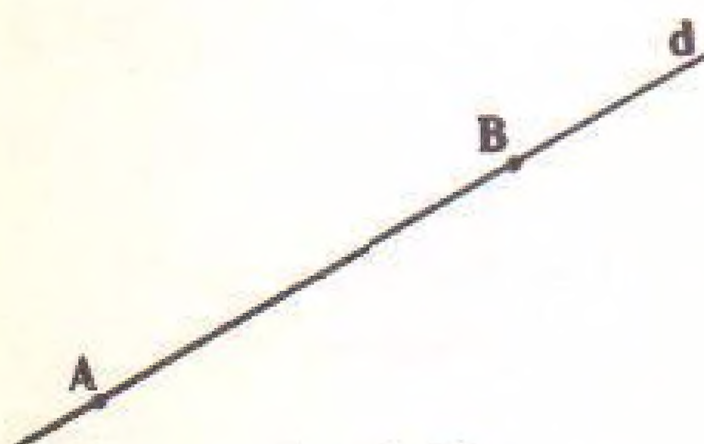
نیم خط مجموعه همه آن نقطه‌هایی از یك خط راست است که در یك طرف نقطه ثابتی روی آن خط قرار دارند .



شکل (۲-۱)

هر نیم‌خط را با دو نقطه مشخص می کنیم که یکی مبدأ و دیگری نقطهٔ دلخواهی از آن است. در نوشتن معمولا حرفی راکه نمایندهٔ مبدأ است (معمولا حرف بزرگ اختیار می‌شود) درطرف چپ و آن راکه نمایندهٔ یك نقطهٔ غیر مشخص از نیم‌خط است (معمولا حرف کوچك) در طرف راست قرار می‌دهیم و هنگام خواندن ابتدا مبدأ نیم‌خط را نام می‌بریم. مانند نیم‌خطهای Mx و My در شکل (۲ ــ ۱) .

(۱ ــ ۲) ــ پاره خط راست ـ پاره ـ خط جزئی از یك خط راست است که از دو طرف به دو نقطه محدود باشد . مانند پاره‌خطی که در شکل (۲ ــ ۲) با نقطه‌های A و B مشخص شده است .

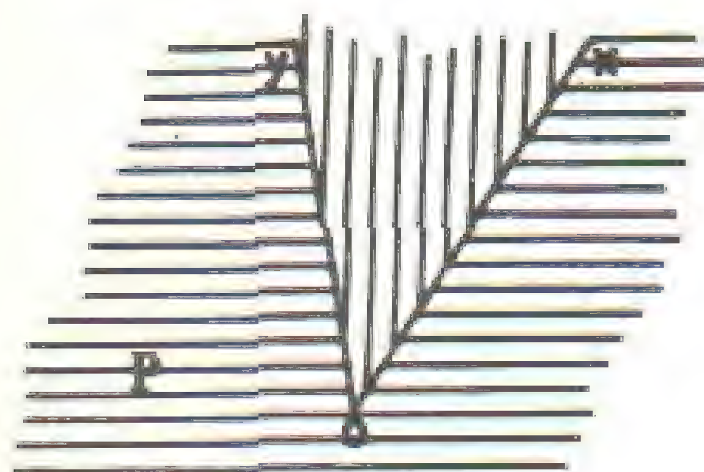


شکل (۲-۲)

با این تعریف هر پاره خط AB مجموعهٔ نقاطی‌از خط راست AB است که بین دو نقطهٔ A و B واقعند این مجموعه هر دو نقطهٔ A و B را شامل است . نقطه‌های A و B را دوسر پاره خط AB می‌نامیم .

(۱-۳) ـ زاویه چیست ؟ ـ دونیم خط ox و oy را که در مبدأ o مشترکند درنظر می گیریم، این دونیم‌خط از صفحهٔ P که شامل آنهاست دوجزء متمایز مشخص می کنند که در شکل (۲-۳) یکی را با پردازهای افقی و دیگری را با پردازهای قائم نشان داده‌ایم. هریك از دو جزء مزبور نمایش یك زاویه است ، بنابراین :

زاویه جزئی از صفحه است که دو نیم‌خط با مبدأ مشترك و مجموعهٔ نقاط محدود به دونیم‌خط مزبور را شامل باشد .



شکل (۲-۳)

هر یك از دو نیم‌خط ox و oy را یك ضلع و نقطهٔ o مبدأ مشترك آنها را رأس زاویه می گوییم .

هر زاویه به رأس o و به اضلاع ox و oy رابا نماد xoy∠ ، (می‌خوانیم : زاویهٔ xoy) نمایش می‌دهیم . گاهی زاویه را فقط با یك حرف که رأس آن رامشخص می کند نمایش می‌دهیم ، مانند o∠ ، وگاهی هم ازیك‌حرف‌یا یك عدد که درمجاورت رأس وبین دوضلع نوشته می‌شود برای‌نامیدن‌زاویه استفاده می کنیم ، مانند α∠ یا ۱∠ درشکل (۲-۴).



شکل (۲-۴)

(۱-۴) ـ نیم صفحه ـ اگر دو ضلع زاویه در یك امتداد باشند زاویه را نیم صفحه گویند . شکل(۲-۵)



شکل (۲-۵)

(۱-۵) ـ اندازه زاویه ـ برای سنجش بزرگی و کوچکی‌زاویه‌ها یك زاویه معین را به‌عنوان واحد اندازه‌گیری اختیار کرده وزاویه‌های دیگر رابا‌آن می‌سنجیم. یکی‌از واحدهای اندازه گیری زاویه درجه است وآن $\frac{۱}{۱۸۰}$ زاویه نیم صفحه میباشد .

(۱-۶) ـ زاویه‌های مجانب ـ هرگاه مجموع دو زاویهٔ مجاور یك زاویهٔ نیم صفحه باشد ، آنها را دو زاویهٔ مجانب می گوییم . مانند زاویه‌های xoz و zoy در شکل (۲-۶) ، به بیان دیگر :



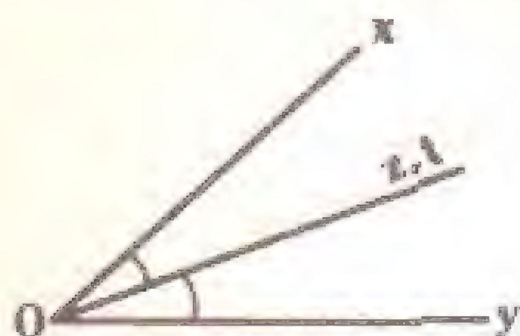
شکل (۲-۶)

دو زاویهٔ مجاور را که دو ضلع غیر مشترك آنها

بر امتداد یکدیگر باشند ، دو زاویهٔ مجانب می‌گوییم .

(۱-۷)- نیمساز زاویه - نیمساز هر زاویه نیم‌خطی‌است از صفحهٔ زاویه که بورأس زاویه می‌گذرد و آن‌را به‌دوزاویه متساوی تقسیم می‌کند .

واضح است که اگر oz نیمساز $\angle xoy$ باشد، هر یك از دو زاویه‌ای که به وسیلهٔ نیمساز زاویه به‌وجود می‌آیند نصف زاویهٔ مفروض است .



شکل (۲-۷)

هرزاویه فقط یك‌نیمساز دارد. زیرا اگر oz و ot هردو نیمساز $\angle xoy$ باشند شکل(۲-۷) برطبق تعریف :

$$\left.\begin{aligned}\angle xoz=\tfrac{1}{2}\angle xoy\\ \angle xot=\tfrac{1}{2}\angle xoy\end{aligned}\right\}\Longrightarrow \angle xoz=\angle xot$$

وچون این دو زاویهٔ متساوی در رأس و در ضلع ox مشترکندودریك طرف‌آن ضلع قرار دارند الزاماً دوضلع دیگرآنها هم بریکدیگر منطبق می‌شوند . پس $\angle xoy$ فقط یك نیمساز دارد .

۲- خطهای عمود برهم

(۲-۱) - دوخط عمود برهم - خط xy ونقطهٔ o واقع برآن‌رادرنظر می‌گیریم (شکل ۲-۸) . هرگاه oz را چنان رسم کنیم که نیمساز زاویهٔ‌نیم‌صفحهٔ xoy باشد، می‌گوییم oz بر xy عمود است .



شکل (۲ - ۸)

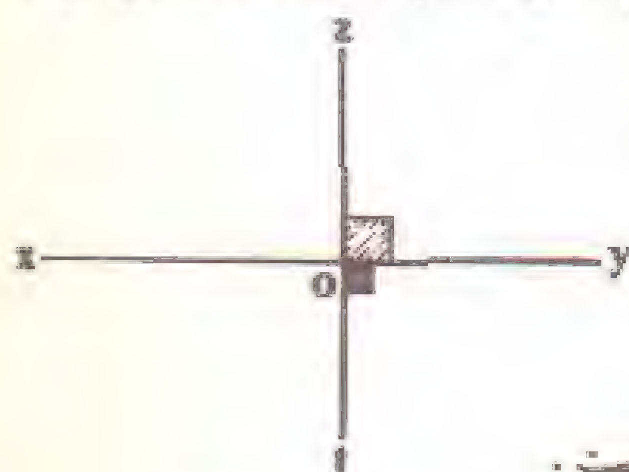
oz را بر xy عمود می‌گوییم وقتی‌که از برخورد آنها دو زاویهٔ مجانب متساوی به‌وجود آیند .

نماد عمود بودن « $\perp$ » است که بین نامهای دو خط گذاشته می‌شود .

$oz\perp xy$: $\angle xoz=\angle zoy=$ نصف‌زاویهٔ نیم‌صفحه

اکنون zo رادرطرف دیگر xy امتداد می‌دهیم(شکل ۲-۹) تا خط zt حاصل شود:

$$\left.\begin{aligned}\angle zot&=\text{نیم‌صفحه}\\ \angle zoy&=\tfrac{1}{2}\,\text{نیم‌صفحه}\end{aligned}\right\}\Longrightarrow yot=\tfrac{1}{2}\,\text{نیم‌صفحه}$$



شکل (۲ - ۹)

پس $\angle zoy=\angle yot$ و بنا برتعریف oy بر zt عمود است .

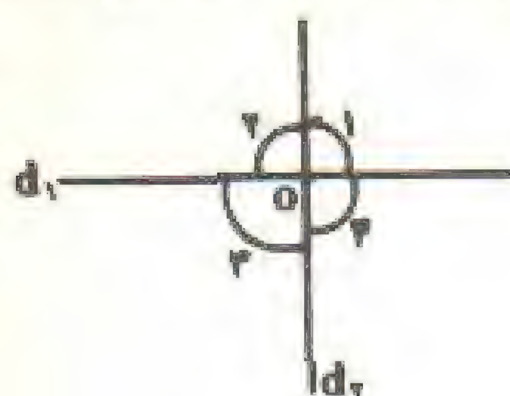
بنابراین :

هرگاه xy بر zt عمود باشد، zt هم برxy عمود است .

یعنی هریك از دوخط xy و zt بر دیگری عمود است.

(۲-۲)- زاویهٔ قائمه - هرزاویهٔ بین دو خط عمود برهم‌را قائمه می‌نامیم . به‌بیان دیگر زاویهٔ قائمه نصف زاویهٔ نیم صفحه است .

پس : همهٔ زاویه‌های قائمه مساوی یکدیگرند.



شکل (۲ - ۱۰)

اگر دو خط d_1 و d_2 بر یکدیگر عمود باشند (شکل ۲ - ۱۰)، هر یك از چهار زاویهٔ O_1 ، O_2 ، O_3 و O_4 یك زاویهٔ قائمه است و بنابراین چهار زاویهٔ مزبور مساوی یکدیگرند .

از این رو دو خط عمود بر هم‌را گاهی به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

دو خط وقتی بر هم عمودند که از تقاطع آنها چهار زاویهٔ مساوی پدید آیند .

(۲ - ۳) - زاویه‌های حاده و منفرجه - هر زاویهٔ کوچکتر از یك زاویهٔ قائمه را زاویهٔ حاده‌می گوییم، مانند $\angle BAC$ در شکل (۲-۱۱) .



شکل (۲ - ۱۱)

زاویهٔ منفرجه زاویه‌ای است که بزرگتر اززاویهٔ قائمه وکوچکتر از زاویهٔ نیم صفحه است شکل (۲-۱۲)،



شکل (۲ - ۱۲)

زاویه‌های حاده و منفرجه را گاهی به‌ترتیب زاویه‌های تند و باز می‌نامند .

تمرین

۱- دو زاویهٔ مجاور رسم‌کنید .

۲ - اگر $\angle xoy$ و $\angle yoz$ دو زاویهٔ مجاور باشند، رابطهٔ زیر را چنان کامل کنیدکه گزاره‌های درست باشند :

$$\angle xoy \; \ldots \; \angle yoz = \angle xoz$$

۳- خط xy ونقطهٔ o واقع برآن‌را درنظر گرفته ozرا رسم‌کنید.

اولاً - زاویه‌های xoz و zoy نسبت به هم چه وضعی دارند ؟

ثانیاً ـ اگر ou نیمساز $\angle xoz$ و ot نیمساز $\angle zoy$ باشد، گزاره‌های درست زیر را کامل کنید:

$$\angle zot = \frac{۱}{۲} \angle \ldots$$

$$\angle uoz = \ldots \angle xoz$$

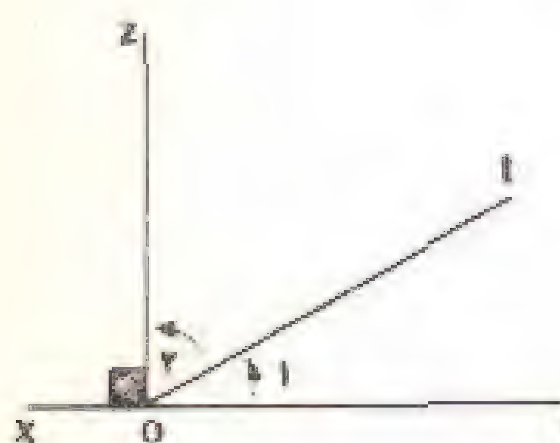
۴ ـ زاویه‌های قائمه، حاده و منفرجه را تعریف کنید. از هر یک از آنها یک نمونه رسم کنید. آیا دو زاویهٔ حاده ممکن است مجانب باشند؟ دو زاویهٔ منفرجه چطور؟

۵ ـ ثابت کنید از هر نقطهٔ واقع بر یک خط، فقط یک خط عمود بر آن می‌توان رسم کرد.

۳ـ زاویه‌های متمم و مکمل و متقابل به‌رأس

(۳ ـ ۱) ـ زاویه‌های متمم ـ دو زاویه را در صورتی متمم یکدیگر می‌گوییم که مجموع اندازه‌های آنها °۹۰ باشد. مانند زاویه‌های °۳۵ و °۵۵ یا زاویه‌های '۱۲ °۲۵ و '۴۸ °۶۴.

مجموع دو زاویهٔ متمم در صورتی که مجاور باشند، یک زاویهٔ قائمه است. مانند زاویه‌های O_1 و O_2 در شکل (۲ـ۱۳). متمم هر زاویهٔ $\hat{\alpha}$، $۹۰° - \hat{\alpha}$ است.

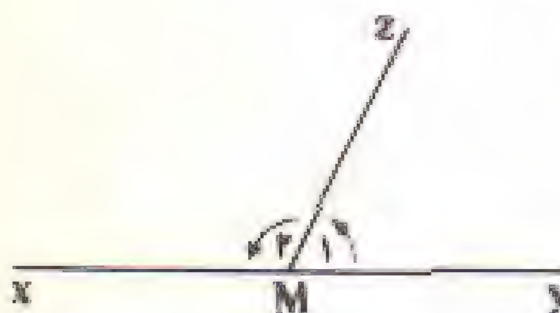


شکل (۲ ـ ۱۳)

(۳ ـ ۲) ـ زاویه‌های مکمل ـ دو زاویه را در صورتی مکمل یکدیگر می‌گوییم که مجموع اندازه‌های آنها °۱۸۰ باشد. مانند زاویه‌های °۵۰ و °۱۳۰ یا زاویه‌های '۳۵ °۸۲ و '۲۵ °۹۷.

مکمل هر زاویهٔ $\angle\alpha$، $۱۸۰° - \angle\alpha$ است.

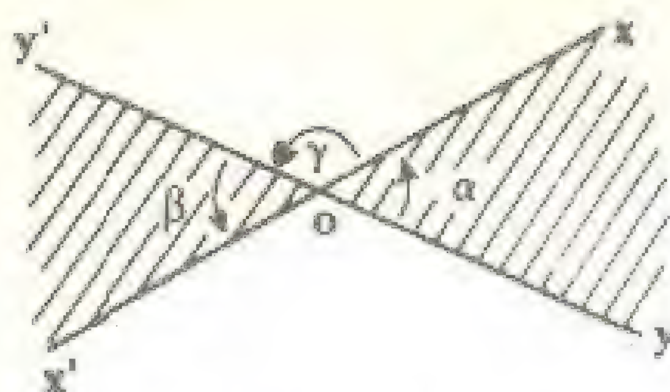
مجموع دو زاویهٔ مکمل در صورتی که مجاور هم باشند، یک زاویهٔ نیم‌صفحه است و دو زاویهٔ مکمل در این حالت مجانب هستند، مانند زاویه‌های M_1 و M_2 در شکل (۲ـ۱۴).



شکل (۲ ـ ۱۴)

(۳ ـ ۳) ـ زاویه‌های متقابل به رأس ـ دو زاویه را که رأس مشترک داشته

باشند و اضلاع آنها دوبه دو بر امتداد یکدیگر و در جهات مختلف باشند متقابل به رأس می گوییم، مانند زاویه‌های xOy و $x'Oy'$ در شکل (۲ - ۱۵) .



شکل (۲ - ۱۵)

قضیهٔ ۱ - دو زاویهٔ متقابل به رأس متساویند.

برهان - اگر در شکل (۲ - ۱۵) اندازهٔ $\angle xoy'$ را γ بنامیم:

$(\angle y'oy =$ زاویهٔ نیم‌صفحه$) \Longrightarrow (\angle\alpha = ۱۸۰^\circ - \angle\gamma)$

$(\angle x'ox =$ زاویهٔ نیم‌صفحه$) \Longrightarrow (\angle\beta = ۱۸۰^\circ - \angle\gamma)$

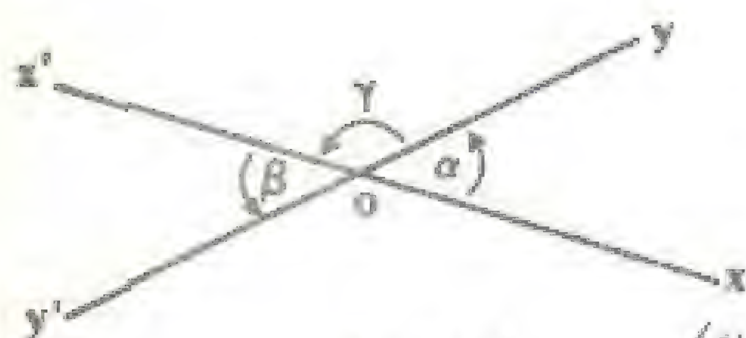
$\Longrightarrow \angle\alpha = \angle\beta$

$\Longrightarrow \angle xoy = \angle x'oy'$

قضیهٔ ۲ - اگر دو زاویهٔ متساوی رأس مشترک داشته باشند و یک ضلع از یکی با یک ضلع از دیگری در امتداد یک خط راست باشند و دو ضلع دیگر آنها در طرفین آن خط راست باشند، دو زاویهٔ متقابل به رأس تشکیل می‌دهند. (یعنی دو ضلع دیگر آنها نیز بر امتداد یک خط راست هستند).

برهان قضیه را به صورت زیر کامل کنید.

اگر در شکل (۲ - ۱۶) زاویه‌های α و β .... یکدیگر ... ودونیم خط ox و ox' بریک خط راست واقع باشند، واضح است که:



شکل (۲ - ۱۶)

$$\left.\begin{array}{l}\angle\gamma = ۱۸۰^\circ - \angle\alpha \\ \angle\alpha = \angle\beta\end{array}\right\} \Longrightarrow \angle\gamma = ۱۸۰^\circ - \angle\beta$$

یعنی زاویه‌های γ و β ... یکدیگرند وچون مجاور هستند لزوماً مجانب یکدیگر ... وبنابراین $\angle y'oy$ یک زاویهٔ ..... است. یعنی oy و oy' برامتداد یک خط .... واقعند.

قضیهٔ ۳ - نیمسازهای دو زاویهٔ متقابل به رأس بر یک خط راست واقعند.

اثبات قضیه به عهدهٔ دانش‌آموزان است.

تمرین

۱ - کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام یک نادرست است؟

- دو زاویهٔ مجانب مکمل یکدیگرند. - دو زاویهٔ مجاور متمم یکدیگرند. - دو زاویهٔ

مکمـل مجانبند . ــ زاویه‌هـای $\angle\alpha = ۳۵^\circ$ و $\angle\beta = ۶۵^\circ$ متمم یکدیگرند . ــ دو زاویهٔ $\angle x = ۱۱۸^\circ ۲۴'$ و $\angle y = ۶۱^\circ ۳۶'$ مکمل یکدیگرند. ــ دو زاویهٔ متقابل به رأس مکمل یکدیگرند . ــ دو زاویهٔ متقابل به رأس در صورتی متمم هستند که اندازهٔ هر یک ۴۵° باشد . اگر دو زاویه متساوی باشند ، متممهای آنها نیز متساویند ــ زاویه‌های مکمل دو زاویهٔ متساوی مساوی یکدیگرند .

۲ ــ دو زاویهٔ متقابل به‌رأس مکمل یکدیگرند ، اندازهٔ هریك را تعیین کنید.

۳ــ $\angle\alpha = ۲۴^\circ ۱۷''$ است، اندازه‌های زاویه‌های متمم و مکمل آن را تعیین کنید.

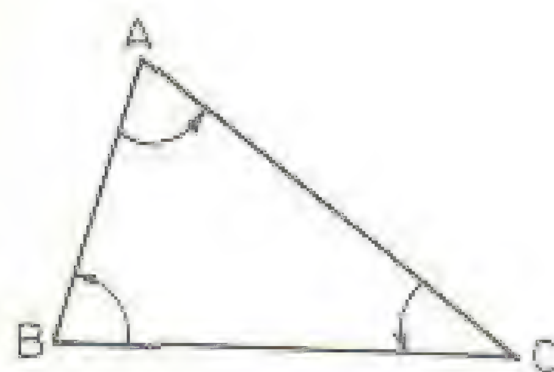
۴ ــ دو زاویهٔ x و y متمم یکدیگرند و $\angle x = ۷\angle y$ است. اندازهٔ هریك از این‌دو زاویه را برحسب درجه تعیین کنید.

فصل سوم

مثلث و برخی از خواص آن

(۱-۱) - مثلث چیست ؟ - اگر سه نقطه غیرواقع بر یک خط راست را ، دو به دو ، با سه پاره خط بهم وصل کنیم ، شکلی ایجاد می شود که آن را مثلث نامند، هر پاره خط را ضلع و هر نقطه را رأس مثلث می گویند . شکل (۳-۱)

هر مثلث را با نماد △ نمایش می‌دهیم و به نام سه رأس آن می خوانیم. مانند △ABC (مثلث ABC) در شکل (۳ - ۱) .



شکل (۳-۱)

هر مثلث دارای سه ضلع ، سه رأس و سه زاویه است . مانند ضلعهای AB ، AC و BC و رأسهای A ، B و C و زاویه‌های BAC و ABC و BCA در △ABC .

سه ضلع و سه زاویهٔ هر مثلث اجزای اصلی آن هستند زیرا هیچ مثلثی را بدون رسم این اجزا نمی‌توان مشخص کرد .

هرضلع مثلث مقابل یک رأس و یک زاویه از آن است وهر زاویه یا هر رأس نیز مقابل یک ضلع مثلث است .

درهندسه معمولا اندازهٔ هرضلع مثلث را باحرف کوچکی که رأس مقابل آن را بهآن نامیده‌ایم نمایش می‌دهیم . چنان‌که اندازهٔ ضلع BC مقابل به راس A از △ABC را با حرف a واندازهٔ ضلع AC مقابل به رأس B را با حرف b و ... می نمایم .

زاویه‌های مثلث ABC و اندازه‌های آنها را معمولا بـه صورت ∠A و ∠B و∠C نمایش می‌دهیم.

مثلث دارای اجزای دیگری است که از آن جمله ارتفاعها ، میانه‌ها ، نیمسازهای زاویه‌ها وعمود منصفهای اضلاعند. درباره این اجزا درصفحهٔ ۱۷ سخن‌خواهیم گفت.

(۱-۲)- تساوی دو مثلث - دو مثلث ، وقتی مساوی یکدیگرند که قابل انطباق باشند. دومثلث متساوی دووضع مختلف از یک مثلث بوده و هم اندازه هستند .

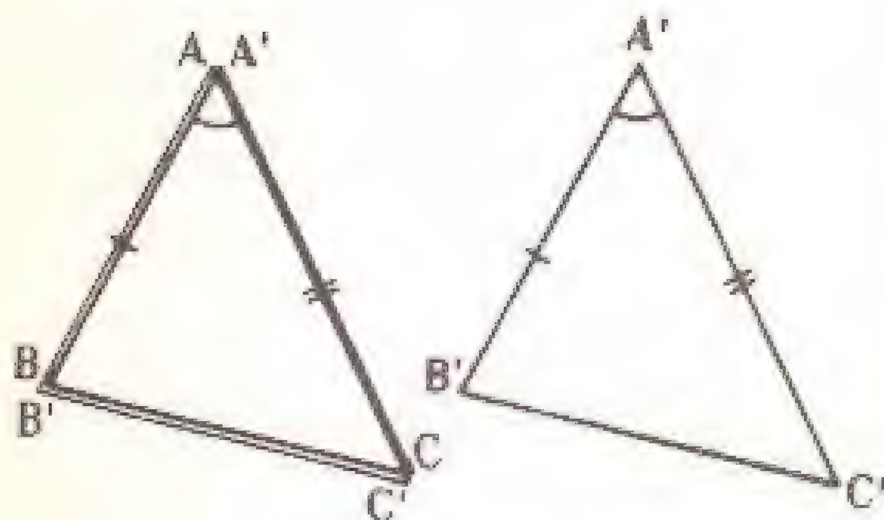
حالتهای اصلی تساوی دو مثلث

۱ـ حالت تساوی دو ضلع و زاویهٔ بین آنها (ض ز ض)

قضیه ـ هرگاه دوضلع وزاویهٔ بین آنها از مثلثی با دوضلع و زاویهٔ بین آنها از مثلث دیگر مساوی باشند، آن دو مثلث متساویند. یعنی:

$$\left.\begin{array}{r} AB = A'B' \\ \angle A = \angle A' \\ AC = A'C' \end{array}\right\} \Longrightarrow \triangle ABC = \triangle A'B'C'$$

برهان ـ مثلث $A'B'C'$ (یا هم اندازهٔ آن) را چنان جابه‌جا می‌کنیم که $\angle A'$ بر مساوی آن $\angle A$ قرار گیرد، یعنی نقطهٔ A' بر نقطهٔ A و امتداد $A'B'$ بر امتداد AB و امتداد $A'C'$ بر امتداد AC قرار گیرند (شکل ۳ـ۲). چون $A'B' = AB$ است، در این حالت نقطهٔ B' برنقطهٔ B واقع می‌شود، و به‌همین دلیل نقطهٔ C' برنقطهٔ C قرار می‌گیرد. پس دو مثلث یکدیگر را می‌پوشانند، یعنی مساوی یکدیگرند. (توجه داشته باشید که برای انطباق علاوه برلغزاندن ممکن است مجبور باشیم که شکل را پشت و رو هم بکنیم.)



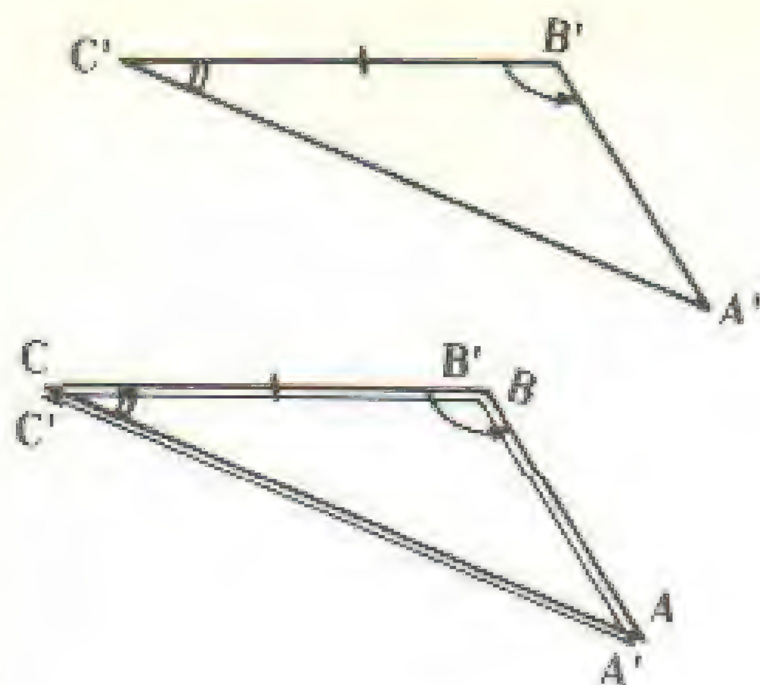
شکل (۳ـ۲)

۲ـ حالت تساوی دو زاویه و ضلع بین آنها (ز ض ز)

قضیه ـ هرگاه دو زاویه و ضلع بین آنها از مثلثی با دو زاویه وضلع بین آنها ازمثلث دیگر مساوی باشند، آن دو مثلث متساویند. یعنی:

$$\left.\begin{array}{r} \angle B = \angle B' \\ BC = B'C' \\ \angle C = \angle C' \end{array}\right\} \Longrightarrow \triangle ABC = \triangle A'B'C'$$

برهان ــ هم اندازهٔ مثلث $A'B'C'$ را چنان جابه‌جا می‌کنیم که پاره‌خط $B'C'$ بر مساوی آن BC منطبق شود و رأس B' بر نقطهٔ B قرارگیرد (شکل ۳ــ۳). چون زاویه‌های B' و B مساوی یکدیگرند، وقتی رأسها و دو ضلع $B'C'$ و BC آنها روی هم قرار گرفتند دو ضلع دیگرشان نیز برهم منطبق می‌شوند، یعنی امتداد $A'B'$ بر امتداد AB قرارمی گیرد. بهمین دلیل به علت تساوی زاویه‌های C' و C ضلع $C'A'$ بر CA منطبق می‌شود. اما دو خط BA و CA تنها یك نقطهٔ مشترك می‌توانند داشته باشند که همان نقطهٔ A است، بنابراین رأس A' از مثلث $A'B'C'$ بر نقطهٔ A واقع می‌شود و دو مثلث کاملاً روی هم قرار می‌گیرند، پس مساوی یکدیگرند.



شکل (۳ــ۳)

۴ ــ حالت تساوی سه‌ضلع (ض ض ض)

قضیه ــ هرگاه سه‌ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگر مساوی باشند، آن دو مثلث متساویند.

این حالت از تساوی دو مثلث را برمبنای گزاره‌هایی که تاکنون اثبات کرده‌ایم نمی‌توان ثابت کرد. برهان آن را در صفحهٔ ۲۱ خواهیم دید.

تمرین

۱ ــ هریك از عبارات زیر را چنان کامل کنید که یك گزارهٔ درست حاصل شود:

ــ اگر دومثلث با یك مثلث ABC مساوی باشند، خود ... یکدیگرند. ــ اگر در دو مثلث دو زاویه نظیر به‌نظیر مساوی باشند، دومثلث ممکن است مساوی ... ــ اگر سه‌ضلع مثلثی ۵ و ۷ و ۹ سانتیمتر و سه ضلع مثلث دیگری ۵ و ۹ و ۷ سانتیمتر باشد، آن دومثلث ... ــ اگر در دومثلث یك زاویه مساوی °۷۵ و دوضلع این زاویه در یکی از آنها ۸ و ۶ سانتیمتر ودردیگری ۶ و ۸ سانتیمتر باشد، آن دومثلث ...

۲ــ دو مثلث ABC و RST را در نظر گرفته و تحقیق کنید در کدام یك از حالات زیر مساوی یکدیگرند و چرا؟

(الف) $AB = RS$, $AC = RT$, $\angle A = \angle R$

(ب) $\angle B = \angle S$, $AB = RS$, $BC = ST$

(ج) $BC = ST$, $\angle S = \angle B$, $\angle C = \angle T$

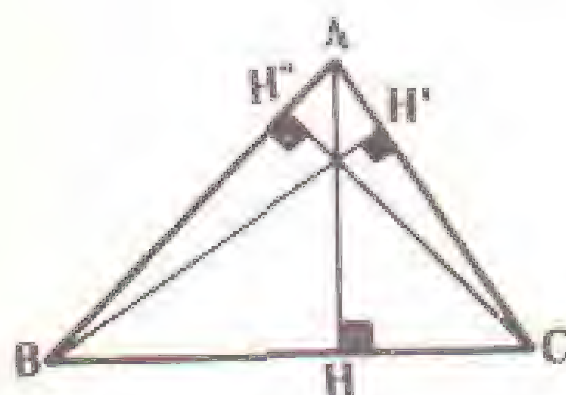
(د) $AB = RS$, $\angle C = \angle T$, $CB = TS$

۴- در شکل (۳-۴) $\angle D_1 = \angle C_1$ و $AD = BC$ است ، ثابت کنید $AC = BD$.



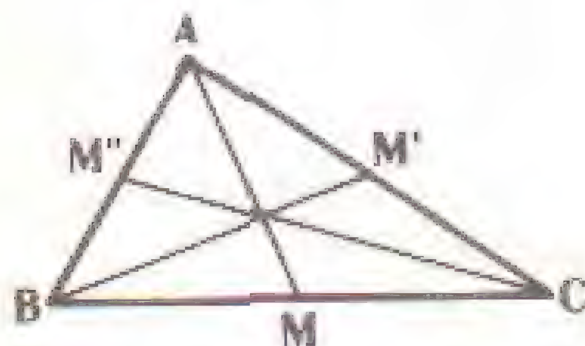
شکل (۳-۴)

(۱-۳)- اجزای دیگر مثلث



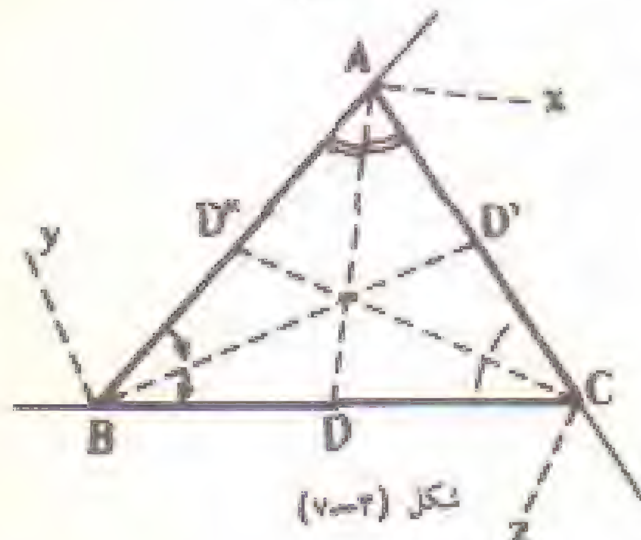
شکل (۳-۵)

۱- ارتفاعهای مثلث - ارتفاع مثلث پاره خطی است که از یك رأس بگذرد و بر ضلع مقابل آن رأس عمود و به آن ضلع محدود باشد . هرمثلث سه ارتفاع دارد ، مانند ارتفاعهای AH و BH' و CH" در $\triangle$ ABC (شکل ۳-۵) .



شکل (۳-۶)

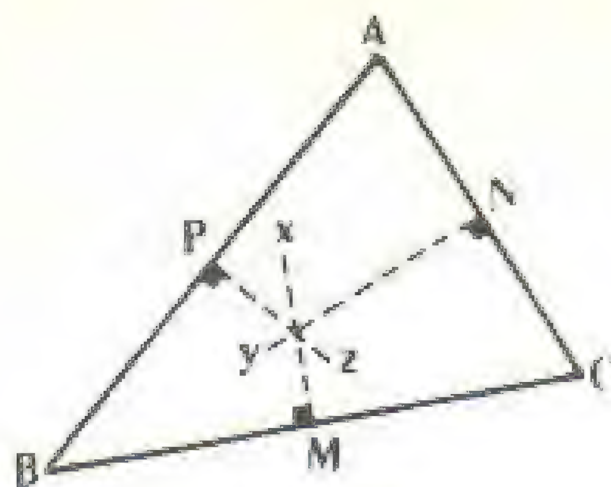
۲- میانه‌های مثلث- میانهٔ مثلث پاره خطی است که یك رأس را به وسط ضلع مقابل آن وصل می کند ، هرمثلث سه میانه دارد . مانند میانه‌های AM و BM' و CM" در $\triangle$ ABC از شکل (۳-۶) .



شکل (۳-۷)

۳- نیمسازهای زاویه‌های مثلث- نیمساز هر زاویهٔ مثلث پاره خطی است که آن زاویه را نصف می کند و به رأس زاویه ونقطه‌ای ازضلع مقابل آن محدود است . مانند پاره خطهای AD و BD' و CD" و Ax و By و Cz در $\triangle$ABC ازشکل (۳-۷).

هر مثلث سه نیمساز زاویهٔ داخلی و سه نیمساز زاویهٔ خارجی دارد.



شکل (۳—۸)

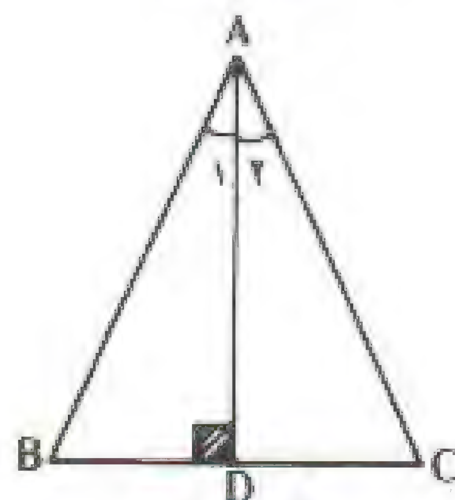
۴ـ عمود منصفهای اضلاع مثلث. عمود منصف هرضلع مثلث خطی است که از وسط آن ضلع می‌گذرد و بر آن عمود است ، مانند Mx در شکل (۳—۸) که عمود منصف BC است .

درهر مثلث هرضلع یك عمودمنصف دارد .



شکل (۳—۹)

(۱-۳) ـ مثلث متساوی ـ الساقین ـ مثلثی را که در آن دوضلع مساوی وجود داشته باشد مثلث متساوی الساقین می‌گوییم . در هرمثلث متساوی الساقین هر یك از دو ضلعی را که مساوی یکدیگرند، ساق و ضلع سوم را قاعده و رأس مشترك ساقها را که مقابل به قاعده است رأس می‌نامیم (شکل ۳— ۹) .



شکل (۳—۱۰)

خواص مثلث متساوی‌الساقین ـ در مثلث متساوی‌الساقین ABC (شکل ۳ ـ ۱۰) ، نیمساز زاویهٔ رأس را رسم می کنیم تا قاعدهٔ BC را درنقطهٔ D قطع کند ، در دومثلث ADB و ADC :

$$\left.\begin{array}{l} AB = AC \\ \angle DAB = \angle DAC \\ AD = AD \end{array}\right\} \Longrightarrow \triangle ADB = \triangle ADC$$

بنابراین $\angle B = \angle C$.

یعنی:

قضیهٔ ۱ ـ در مثلث متساوی الساقین زاویه‌های روبه‌روی ساقها متساویند .

از تساوی دومثلث ADB و ADC می‌توان داشت :

$$DB = DC$$

$$\angle ADB = \angle ADC = 90°$$

یعنی پاره‌خط AD قاعدهٔ BC مثلث ABC را نصف می کند و بر آن خط عموداست. بنابراین می‌توان گفت :

قضیه ۲ ـ در مثلث متساوی‌الساقین نیمساز زاویهٔ رأس و ارتفاع و میانهٔ وارد بر قاعده و عمودمنصف قاعده بر هم منطبقند .

قضیه عکس ـ می‌دانیم که هر قضیه T یك گزارهٔ شرطی همیشه درست است که به صورت $P \Longrightarrow Q$ بیان‌می‌شود P فرض و Q نتیجه یا حکم قضیه است. عکس هر قضیهٔ T مانند $P \Longrightarrow Q$ قضیهٔ دیگری است که فرض آن نتیجه T (یعنی Q) و نتیجه‌آن فرض T (یعنی P) باشد.بنابراین عکس قضیهٔ $T: P \Longrightarrow Q$ بصورت $T' : Q \Longrightarrow P$ بیان می‌شود.

مثال ـ در مثلث متساوی‌الساقین ABC متساوی بودن ساقهای AB و AC را با P و مساوی بودن زاویه‌های B و C را با Q نمایش می‌دهیم ، در این صورت قضیهٔ قبل که در هر مثلث $ABC : \angle B = \angle C \Longrightarrow AB = AC$ بیان شد به اختصار با $Q \Longrightarrow P$ بیان می‌شود.

ثابت خواهیم کرد که در هر مثلث $ABC : AB = AC \Longrightarrow \angle C = \angle B$ که با نماد $P \Longrightarrow Q$ بیان می‌شود . این قضیه عکس قضیهٔ قبلی است . یعنی : دو قضیهٔ زیر هر یك عکس دیگری است .

قضیهٔ T ـ هر گاه در مثلثی دوضلع متساوی باشند (P) زاویه‌های روبه‌روی آنها متساویند (Q) .

قضیهٔ 'T ـ هر گاه دوزاویهٔ مثلثی متساوی باشند (Q) ضلعهای روبه‌روی آنها متساویند (P) .

در برخی موارد عکس یك قضیهٔ درست نیز قضیه‌ای درست است . اما باید توجه داشت که این امر کلی و عمومی نیست . یعنی ، عکس یك قضیهٔ درست درهمهٔ موارد یك قضیهٔ درست نیست .

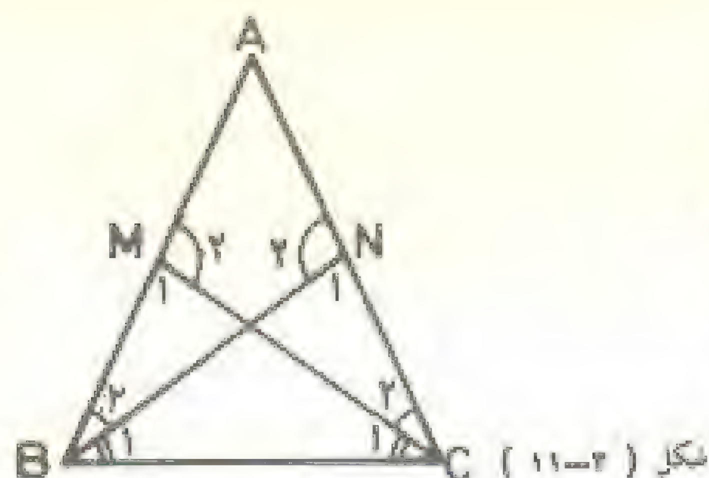
اینك خواصی از مثلث متساوی الساقین را با قضایای عکس قضیه‌های قبل بیان می کنیم :

قضیه ۱ ـ مثلثی که دو زاویهٔ مساوی داشته باشد ، متساوی الساقین است. به‌بیان دیگر :

ـ هر گاه درمثلثی دو زاویه متساوی باشند ، ضلعهای روبه‌روی آنها متساویند . یعنی :

$$\triangle ABC : \angle B = \angle C \Longrightarrow AC = AB$$

برهان ــ بر دو ضلع BA و CA از مثلث ABC (شکل ۳ــ۱۱) ، دو پاره خط BM و CN را مساوی یکدیگر جدا کرده ومثلثهای BNC و CMB راکامل می کنیم . در دو مثلث BNC و CMB :



شکل (۳ــ۱۱)

$$\left.\begin{array}{r} BC=CB \\ \angle B=\angle C \\ NC=MB \end{array}\right\} \Longrightarrow \triangle BNC=\triangle CMB \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} BN=MC \\ \angle B_1=\angle C_1 \\ \angle N_1=\angle M_1 \end{array}\right.$$

می توان ملاحظه نمود که در این صورت : $\angle B_2=\angle C_2$ و $\angle N_2=\angle M_2$ (چرا ؟)

از اینجا نتیجه میشود :

$$\left.\begin{array}{r} \angle B_2=\angle C_2 \\ BN=CM \\ \angle N_2=\angle M_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \triangle BNA=\triangle CMA \Longrightarrow AB=AC$$

قضیهٔ ۲ ــ مثلثی که میانه وارتفاع نظیر یك ضلع آن برهم منطبق باشند متساوی‌الساقین است .

قضیهٔ ۳ ــ مثلثی که ارتفاع نظیر یك ضلع آن نیمساز زاویهٔ مقابل به آن ضلع هم باشد ، متساوی‌الساقین است .

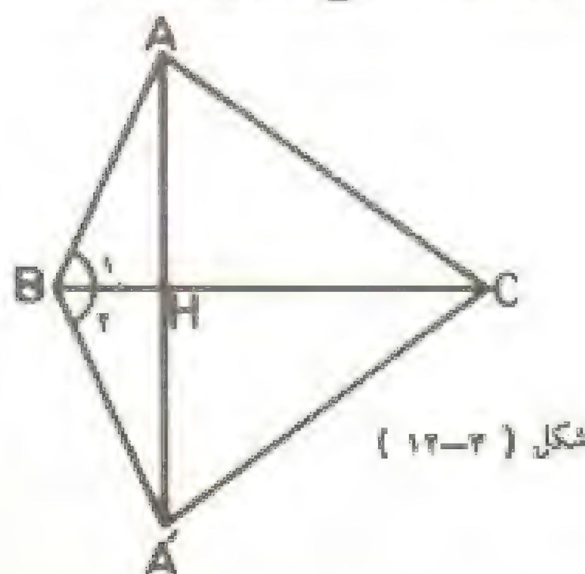
قضیهٔ ۴ ــ مثلثی که میانهٔ نظیر یك ضلع آن نیمساز زاویهٔ مقابل به آن ضلع هم باشد ، متساوی‌الساقین است .

اثبات سه قضیهٔ اخیر به عهدهٔ دانش‌آموزان است . برای اثبات قضیهٔ چهارم میانهٔ وارد برضلع را از وسط ضلع به اندازهٔ خودش امتداد دهید و انتهای آن را به یکی از دوراس دیگر مثلث وصل کنید و ...

مسأله ــ مثلث ABC مفروض است . ارتفاع AH را رسم کرده وازطرف H باندازهٔ خود تا نقطهٔ 'A امتداد می‌دهیم . نقطهٔ 'A را به نقاط B و C وصل می کنیم . ثابت کنید دو مثلث ABC و A'BC مساویند. ($\triangle A'BC$ را وارون $\triangle ABC$ نسبت به ضلع BC می گویند).

حل ــ دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AHB و A'HB مساویند (چرا ؟) شکل (۳ــ۱۲) .

از تساوی آنها نتیجه میگیریم 'BA = BA و $\angle B_1=\angle B_2$ بنا براین دومثلث ABC و A'BC درحالت (ض ز ض) مساویند.



شکل (۳ــ۱۲)

تمرین

۱ ـ ثابت کنید که میانه‌های نظیر دوساق هر مثلث متساوی‌الساقین مساوی یکدیگرند .

۲ ـ ثابت کنید که نیمسازهای زاویه‌های داخلی مقابل به‌ساقهای هرمثلث متساوی‌الساقین مساوی یکدیگرند .

۳ ـ ثابت کنید اگر سه زاویهٔ داخلی مثلثی مساوی یکدیگر باشند ، سه ضلع آن مثلث نیز مساوی یکدیگرند .

۴ ـ برقاعدهٔ BC ازمثلث متساوی‌الساقین ABC دونقطهٔ M و N را چنان اختیار می کنیم که BM = NC باشد و این نقاط را بـه رأس A وصل می‌کنیم . ثابت کنید مثلث AMN متساوی‌الساقین است

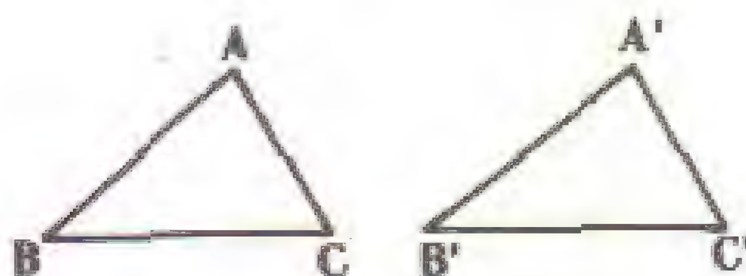
۵ ـ درمثلث متساوی‌الساقین ABC در دونقطهٔ B و C دوخط بردوساق عمود می کنیم تایکدیگر را در نقطهٔ D قطع کنند ، ثابت کنید DC = DB

۶ ـ ثابت کنید اگر دومثلث متساوی‌الساقین قاعدهٔ مشترك داشته باشند ، خطی که دو رأس آنها را به‌هم وصل کند از وسط قاعده می گذرد . این خط چه‌خاصیت مهم دیگری دارد؟

۷ـ درمثلثی که‌یك زاویهٔ آن قائمه یا منفرجه باشد، سه ارتفاع آن‌را رسم کنید.

حالت سوم تساوی دو مثلث (ض‌ض‌ض) ـ قبلا اشاره شد که اگر سه ضلع از مثلثی با سه ضلع ازمثلث دیگرمساوی باشند ، دومثلث مساوی یکدیگرند . اکنون با استفاده ازخاصیتهای مثلث متساوی‌الساقین می‌توان قضیه را ثابت کرد.

فرض می کنیم‌دردو مثلث ABC و A'B'C' (شکل ۳ـ۱۳) ، AB=A'B' و AC = A'C' و BC = B'C' باشد .



شکل (۳ـ۱۳)

برای اثبات تساوی دو مثلث ، وارون مثلث A'B'C' را (طبق مسأله قبل) می‌سازیم وآنرا A"B"C" می نامیم. مثلث A"B"C" را مانند شکل (۳ـ۱۴) پهلوی مثلث ABC قرار می‌دهیم .

از نقطهٔ A بـه A" وصل کنیم در مثلث ABA" :

$$BA = BA'' \Longrightarrow \angle A_1 = \angle A''_1$$

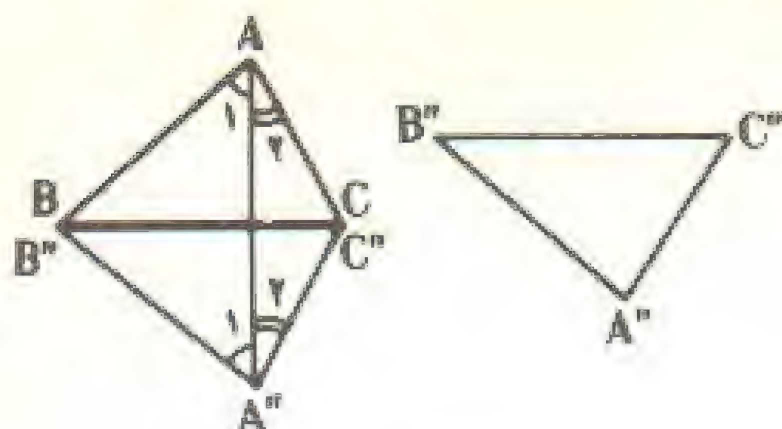
و در مثلث ACA'' :

$CA = CA'' \Longrightarrow \angle A_2 = \angle A''_2$

از جمع کردن دو رابطهٔ اخیر می‌توان نتیجه گرفت :

$\angle A_1 + \angle A_2 = \angle A''_1 + \angle A''_2$

یا $\angle A = \angle A''$



شکل (۳-۱۴)

پس دو مثلث ABC و $A''B''C''$ یا ABC و $A'B'C'$ بحالت ض‌ز‌ض مساوی یکدیگرند .

تساوی دومثلث متساوی‌الساقین - با استناد به قضیه‌های قبل به‌آسانی می‌توانید ثابت کنید که :

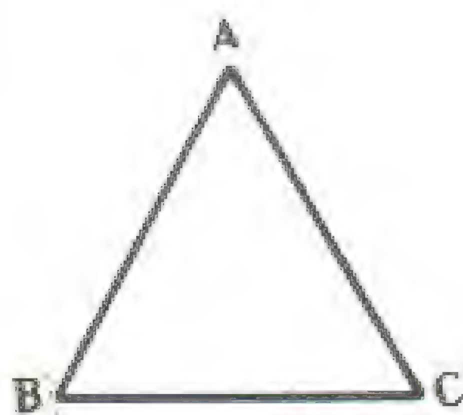
قضیه ۱ — اگر در دو مثلث متساوی‌الساقین یک ساق و زاویه رأس از یک مثلث بایک ساق و زاویه رأس از مثلث دیگر برابر باشند، آن دو مثلث برابرند (ض ز ض).

قضیه ۲ — اگر در دو مثلث متساوی‌الساقین قاعده و یک زاویه مجاور قاعده از یکی با قاعده و یک زاویه مجاور قاعده از دیگری برابر باشند، آن دو مثلث برابرند (ز ض ز).

قضیه ۳ — اگر در دو مثلث متساوی الساقین قاعده و ساق از یکی با قاعده و ساق از دیگری برابر باشند، آن دو مثلث برابرند (ض‌ض‌ض).

(۵-۱) - مثلث متساوی‌الاضلاع -

مثلثی را که سه ضلع آن مساوی یکدیگر باشند مثلث متساوی‌الاضلاع می‌گوییم (شکل ۳-۱۵) .



شکل (۳-۱۵)

با توجه به خواصی که از مثلث متساوی‌الساقین می‌دانیم می‌توان گفت :

۱ - درهرمثلث متساوی‌الاضلاع ارتفاع ،میانه، نیمساز زاویهٔ مقابل وعمود منصف نظیر هرضلع برهم منطبق هستند .

۲ - در هر مثلث متساوی‌الاضلاع سه زاویه مساوی یکدیگرند .

۳ - مثلثی‌که سه‌زاویهٔ آن مساوی یکدیگر باشند متساوی‌الاضلاع است .

یعنی: $\triangle ABC \ : \ (AB = AC = BC) \Longleftrightarrow (\angle A = \angle B = \angle C)$

پس ، مثلث متساوی‌الاضلاع همان سه‌ضلعی منتظم است .

تمرین

۱ـ هریك ازعبارات زیر را چنان کامل کنید که یك گزارهٔ درست حاصل شود :

ـ اگر در دومثلث سه ضلع نظیر به نظیر متساوی باشند ، میانه‌های نظیر . . . . یکدیگرند.
ـ اگر در دومثلث متساوی‌الساقین یك ساق و قاعده نظیر به نظیر متساوی باشند دو مثلث . . . .
ـ مثلثی که سه زاویهٔ آن مساوی یکدیگر باشند یك مثلث . . . . است . ـ مثلث متساوی‌الاضلاع مثلثی است که سه . . . . آن مساوی یکدیگرند . ـ در دومثلث متساوی اجزای متناظر (ارتفاعها، نیمسازها، میانه‌ها) . . . .

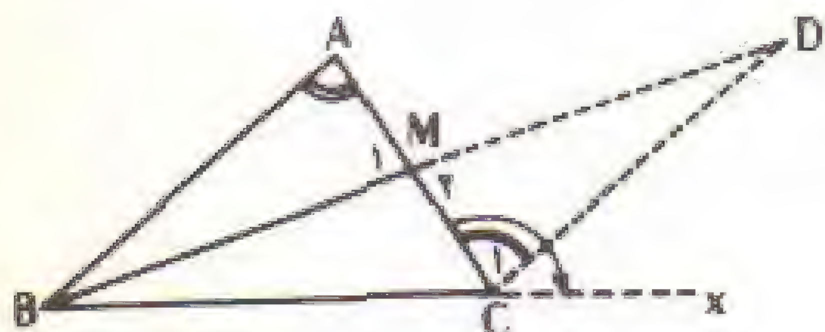
۲ـ قاعدهٔ یك مثلث متساوی الساقین ABC را از دو طرف تا M و N به یك اندازه امتداد داده دونقطهٔ M و N را به رأس وصل می‌کنیم . ثابت کنید $AM = AN$.

۳ـ ثابت کنید اگر نقطهٔ M واقع برارتفاع یك مثلث متساوی‌الساقین را با دو پاره‌خط به دو رأس قاعده وصل کنیم ، پاره‌خطهای حاصل مساوی یکدیگرند .

۴ـ اگر دومثلث ABC از رأس B عمودی برنیمساز زاویهٔ A فرود آوریم تا آن را در نقطهٔ M وضلع AC را در نقطهٔ B' قطع کند ، ثابت کنید $AB' = AB$ است .

(۱ـ۶) ـ نامساویها در مثلث

اصل نامساوی مثلثی ـ هرگاه A و B و C سه نقطه دلخواه باشند $AC \leqslant AB+BC$ (تساوی مربوط به حالتی است که A و B و C روی یك خط راست باشند) .



شکل (۳ـ۱۶)

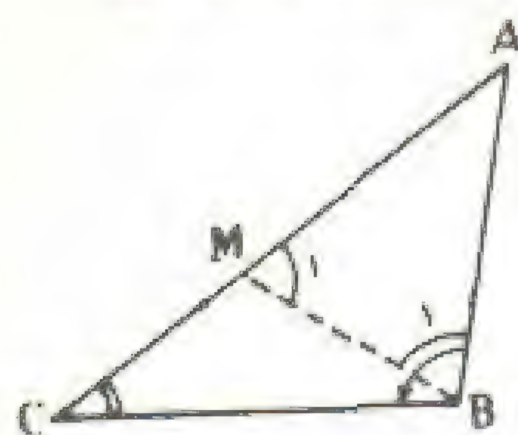
قضیهٔ ۱ ـ در هرمثلث هر زاویهٔ خارجی از هر زاویهٔ داخلی غیر مجاور آن بزرگتر است .

برهان ـ زاویهٔ خارجی ACx از مثلث ABC شکل (۳ ـ ۱۶) را در نظر گرفته میانهٔ BM نظیر ضلع AC را ازنقطهٔ M به جانب خارج مثلث به اندازهٔ $BM = MD$ امتداد می‌دهیم و پاره خط DC را رسم می کنیم، از تساوی دومثلث BMA و DMC نتیجه می‌شود که $\angle A = \angle C_1$ وچون نقطهٔ M بین C و A است ، MD در داخل زاویهٔ ACx قرار می گیرد و CD در داخل آن زاویه واقع می‌شود پس $\angle ACD$ جزئی از زاویهٔ ACx است و در نتیجه کوچکتر از آن است . بنابراین می‌توان نوشت :

$$\left.\begin{array}{l}\angle C_1 < \angle ACx \\ \angle A = \angle C_1\end{array}\right\} \Longrightarrow \angle A < \angle ACx$$

به‌همین‌ترتیب با استفاده از زاویهٔ بین BC وامتداد AC می‌توان ثابت کرد $\angle ACx < \angle B$

قضیهٔ ۲ - اگر در مثلثی دوضلع نابرابر باشند، زاویهٔ مقابل به ضلع بزرگتر از زاویهٔ مقابل به ضلع کوچکتر، بزرگتر است. یعنی: $\triangle ABC : AC > AB \Longrightarrow \angle B > \angle C$



شکل (۳-۱۷)

برهان - در $\triangle ABC$ (شکل ۳-۱۷) که درآن $AC > AB$ است، برضلع AC پاره‌خط AM رامساوی AB جدا کرده‌نقاط M و B راباخط راستی به‌هم وصل می کنیم. ملاحظه می شود که:

$\triangle AMB : AM = AB \Longrightarrow \angle B_1 = \angle M_1$

$\triangle BMC : \angle M_1 > \angle C$

واز این دو رابطه نتیجه می‌شود:

$\angle B_1 > \angle C$، امانقطهٔ M بین دونقطهٔ A و C واقع است، بنابراین BM نیم‌خطی‌داخل $\angle B$ است ودرنتیجه $\angle B_1$ جزئی از زاویهٔ B وکوچکتر ازآن است، پس:

$$\left.\begin{array}{l}\angle B > \angle B_1\\ \angle B_1 > \angle C\end{array}\right\} \Longrightarrow \angle B > \angle C$$

قضیهٔ ۳ (عکس قضیهٔ ۲) - اگر درمثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع روبه‌روی زاویهٔ بزرگتر، بزرگتر است ازضلع روبه‌روی زاویهٔ‌کوچکتر.

یعنی: $\triangle ABC : (\angle B > \angle C) \Longrightarrow AC > AB$

برهان - اگر دراین مثلث $AC > AB$ نباشد، ناچار کوچکتر ازآن یا باآن مساوی‌است اما اگر $AC = AB$ لازم می‌آید که $\angle B = \angle C$ و این خلاف فرض است ومی‌دانیم که چنین نیست. واگر $AC < AB$ باشد، به موجب قضیهٔ قبل باید $\angle B < \angle C$ واین نیز خلاف فرض است ودرست نیست یعنی ضلع AC از مثلث مفروض نه می‌تواند مساوی AB باشد ونه کوچکتر ازآن، پس $AC > AB$.

این نوع برهان را برهان خلف می‌گوئیم. در برهان خلف درست نبودن خلاف حکم را با رسیدن به یك تناقض ثابت می کنیم.

تمرین

۱ - عبارتهای زیر را چنان کامل کنید که گزاره‌های درست نتیجه شوند:

- زاویهٔ برونی مثلث زاویه‌ای است که ... . - در هر مثلث هرزاویهٔ درونی اززاویهٔ برونی که مجاورآن نباشد ... - برای‌آن که درستی گزاره‌ای را از راه برهان خلف ثابت کنیم، ثابت

می کنیم که .... درست نیست.

۲ـ نیمساز زاویهٔ درونی A از مثلث ABC ضلع BC را در نقطهٔ D قطع می کند؛ ثابت کنید BA>BD و CA>CD.

قضیهٔ ۴ ـ در هر مثلث هر ضلع از تفاضل دو ضلع دیگر بزرگتر است. یعنی اگر اندازه‌های اضلاع مثلث ABC را به ترتیب با a و b و c نمایش دهیم: $a>b-c$

برهان ـ بنا بر اصل نامساوی مثلثی در هر مثلث ABC، $AB+BC>AC$ یا $c+a>b$.
حال ملاحظه می کنیم که:

$$\left.\begin{array}{r} c+a>b \\ -c=-c \end{array}\right\} \Rightarrow c+a-c>b-c \Rightarrow \boxed{a>b-c}$$

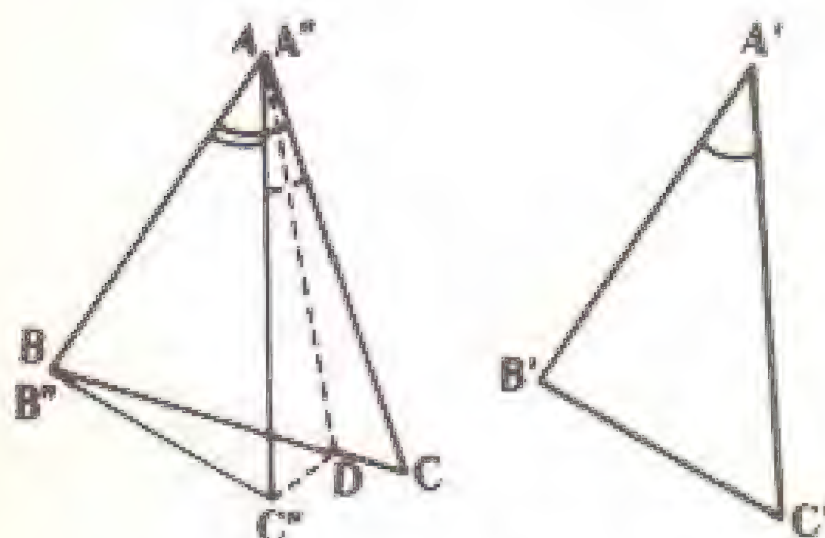
بنابراین:

$$\triangle ABC\,,\quad BC>AC-AB$$

قضیهٔ ۵ ـ هرگاه دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلث دیگر برابر باشند اما زاویه‌های بین آن اضلاع در دو مثلث متساوی نباشند، مثلثی که آن زاویه‌اش بزرگتر باشد ضلع سومش هم بزرگتر است.

یعنی:

$$\triangle ABC\,,\ \triangle A'B'C'\ :\ \left\{\begin{array}{l} AB=A'B' \\ AC=A'C' \\ \angle A>\angle A' \end{array}\right\} \Rightarrow BC>B'C'$$



شکل (۳ـ۱۸)

برهان ـ هم‌اندازهٔ A'B'C' را به صورت A"B"C" چنان برمثلث ABC قرار می‌دهیم که A"B" بر مساوی آن AB منطبق شود و اضلاع AC و A"C" در یک طرف ضلع AB قرار گیرند (شکل ۳ـ۱۸). چون $\angle A>\angle A"$ است در این حالت ضلع A"C" در داخل $\angle BAC$ واقع می‌شود و اگر نیمساز $\angle CAC"$ را رسم کنیم، و این نیمساز ضلع BC را در نقطهٔ D

قطع کند :

$$[(\text{ض ز ض})\ \triangle ADC = \triangle A''DC''] \Longrightarrow DC = DC''$$

و در مثلث $B''C''D$:

$$(B''D + DC'' > B''C'') \Longrightarrow (B''D + DC > B''C'') \Longrightarrow BC > B'C'$$

قضیه ۶ (عکس قضیه ۵) - هرگاه دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلث دیگر برابر باشند اما ضلع سوم آنها متساوی نباشند ، مثلثی که ضلع سومش بزرگتر است زاویهٔ مقابل به ضلع سومش هم بزرگتر است .

صورت قضیه را با نمادهای ریاضی بنویسید و آن را با استفاده از رابطه‌های زیر با برهان خلف ثابت کنید : (نماد $\not<$ را بخوانید : کوچکتر نیست از)

$$\left.\begin{array}{c} \angle A = \angle A' \Longrightarrow BC = B'C' \\ BC > B'C' \end{array}\right\} \Longrightarrow \angle A \neq \angle A'$$

$$\left.\begin{array}{c} \angle A < \angle A' \Longrightarrow BC < B'C' \\ BC > B'C' \end{array}\right\} \Longrightarrow \angle A \not< \angle A'$$

بنابراین :

$$\angle A > \angle A'$$

تمرین

۱- کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام یک نادرست است :

- درهرمثلث متساوی‌الساقین مجموع دوساق بزرگتر از قاعده است . - هر مثلث متساوی‌الاضلاع همهٔ خواص یک مثلث متساوی‌الساقین را دارد . - در هرمثلث متساوی - الساقین هرساق بزرگتر ازنصف قاعده است.

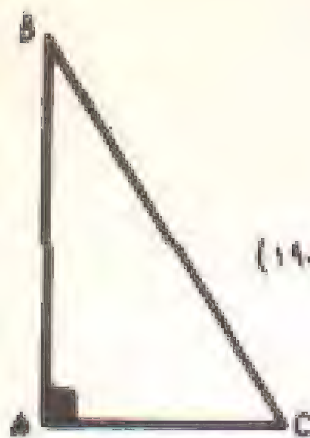
۲- آیا مثلثی وجود دارد که اندازه‌های سه ضلع آن ۸ ، ۴ و ۴ سانتیمتر باشند ؟ چرا ؟

۳- ثابت کنید درهر مثلث هر میانه از نصف مجموع دوضلع مجاور آن کوچکتر است .

۴- ثابت کنیدکه درهرمثلث متساوی‌الساقین ارتفاع نظیر قاعده از هریك از دو ساق مثلث کوچکتر است .

۵- ثابت کنید مجموع فاصله‌های هر نقطهٔ داخل مثلث از سه رأس از نصف مجموع سه ضلع مثلث بزرگتر است .

(۱-۷) ـ مثلث قائم‌الزاویه ـ مثلث قائم‌الزاویه مثلثی است که یکی از زاویه‌های آن قائمه باشد . به بیان دیگر : مثلث قائم‌الزاویه مثلثی است که دو ضلع آن برهم عمود باشند (شکل ۳-۱۹) .



شکل (۳-۱۹)

قضیه ـ مثلث نمی‌تواند بیش از یك زاویه قائمه داشته باشد.

برهان ـ فرض می‌کنیم در مثلث ABC زاویه A قائمه است . پس زاویه برونی مثلث در رأس A نیز قائمه است و از هر زاویه درونی غیر مجاور بزرگتر می‌باشد. یعنی زاویه‌های B و C حاده هستند.

در هر مثلث قائم‌الزاویه ضلع مقابل به زاویه قائمه را وتر می‌گوییم. مانند وتر BC از مثلث قائم‌الزاویه ABC که در آن $AB \perp AC$ و در نتیجه $\hat{A} = 90°$.

حالتهای برابری دو مثلث قائم‌الزاویه

قضیه ۱- اگر در دومثلث قائم‌الزاویه ضلعهای زاویه قائمه ازیکی با ضلعهای زاویه قائمه از دیگری (نظیر به نظیر) برابر باشند، آن دو مثلث برابرند (ض ز ض) .

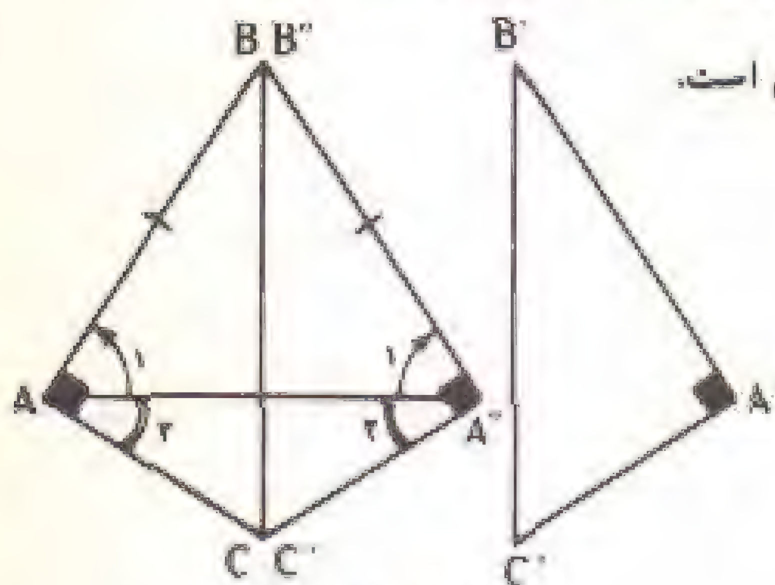
قضیه ۲- اگر در دومثلث قائم‌الزاویه یك ضلع زاویه قائمه و زاویه حاده مجاور بآن ضلع از یك مثلث با یك ضلع زاویه قائمه و زاویه حاده مجاور بآن از مثلث دیگر برابر باشند، آن دو مثلث برابرند (ز ض ز)

قضیه ۳ ـ اگر در دو مثلث قائم‌الزاویه یك‌ضلع زاویهٔ قائمه وزاویهٔ مقابل به‌آن ضلع از یکی با یك ضلع زاویهٔ قائمه و زاویهٔ مقابل بآن ضلع از مثلث دیگر برابر باشند آندو مثلث برابرند (این قضیه را درصفحهٔ ۴۳ ثابت خواهیم‌کرد).

قضیهٔ ۴ ـ اگر در دو مثلث قائم‌الزاویه ، وتر و یك ضلع زاویه قائمه از یك مثلث با وتر و یك ضلع زاویه قائمه از مثلث دیگر برابر باشند ، آن دو مثلث برابرند .

اثبات قضیه اخیر به عهده دانش آموزان است.

راهنمایی ـ هم‌اندازهٔ یك مثلث را ساخته و آن را چنان در مجاورت مثلث دیگر قرار دهید که وترهای مساوی دو مثلث برهم منطبق‌شوند و دو رأس زاویه‌های قائمه مطابق شکل (۳-۲۵) در طرفین وتر مشترك قرار گیرند و ....



شکل (۳-۲۵)

قضیه ۵ – اگر در دو مثلث قائم الزاویه وتر و یك زاویه حاده از یکی با وتر و یك زاویه حاده ازدیگری برابرباشند، آن دو مثلث برابرند .

یعنی :

$$\triangle ABC, \triangle A'B'C' \left\{ \begin{array}{c} \angle A = \angle A' = 90^\circ \\ BC = B'C' \\ \angle B = \angle B' \end{array} \right\} \Longrightarrow (\triangle ABC = \triangle A'B'C')$$

برهان – هم‌اندازهٔ مثلث $B'C'A'$ را چنان بر مثلث BCA قرار می‌دهیم که وتر $B'C'$ بـر مساوی آن BC منطبق شود و دو رأس A و A' از دو مثلث در یك طرف وتر مشترك قرار گیرند (شکل ۳–۲۱) در این حالت چون رأسهـا و اضلاع BC و $B'C'$ از دو زاویهٔ متساوی B و B' را بر هم قـرار داده‌ایم ، ناچار دو ضلع دیگر نیز بـر روی هـم قرار می گیرند . یعنی امتداد $B'A'$ برخط BA منطبق می‌شود . می‌توان ملاحظه نمود که اگر در این وضع ، نقطهٔ A' بر نقطهٔ A منطبق نشود، لزوماً مثلثی‌مانند CAA' باید وجود داشته باشد که در آن زاویهٔ داخلی A و زاویهٔ خارجی A' هر دوقائمه ومساوی یکدیگر باشند ، می‌دانیم که این ممکن نیست ، پس نقاط A و A' بر هم منطبق‌می‌شوند و دو مثلث یکدیگر را می‌پوشانند ، بنابراین مساوی یکدیگرند .

C C' A A' B B' C' A' B'

شکل (۳–۲۱)

تمرین

۱– در مثلثی یك ضلع ۱۴ و دیگری ۲۰ سانتیمتر است و ضلع سوم دوبرابر یکی از آنهاست ، اندازهٔ آن چیست ؟

۲– ثابت کنید در هرمثلث قائم‌الزاویه هرضلع زاویهٔ قائمه از وتر کوچکتر است .

۳– ثابت کنید که درهرمثلث ارتفاع نظیر هرضلع از نصف مجموع دوضلع دیگر کوچکتر است .

۴– ثابت کنید که در هر مثلث متساوی‌الساقین ارتفاعهای نظیر ساقها مساوی یکدیگرند.

۵– ثابت کنید اگر در مثلثی دو ارتفاع مساوی باشند ، مثلث متساوی‌الساقین است .

۶– پاره‌خطهایی که از وسط قاعدهٔ یك مثلث متساوی‌الساقین بردو ساق آن عمود می‌شوند مساوی یکدیگرند .

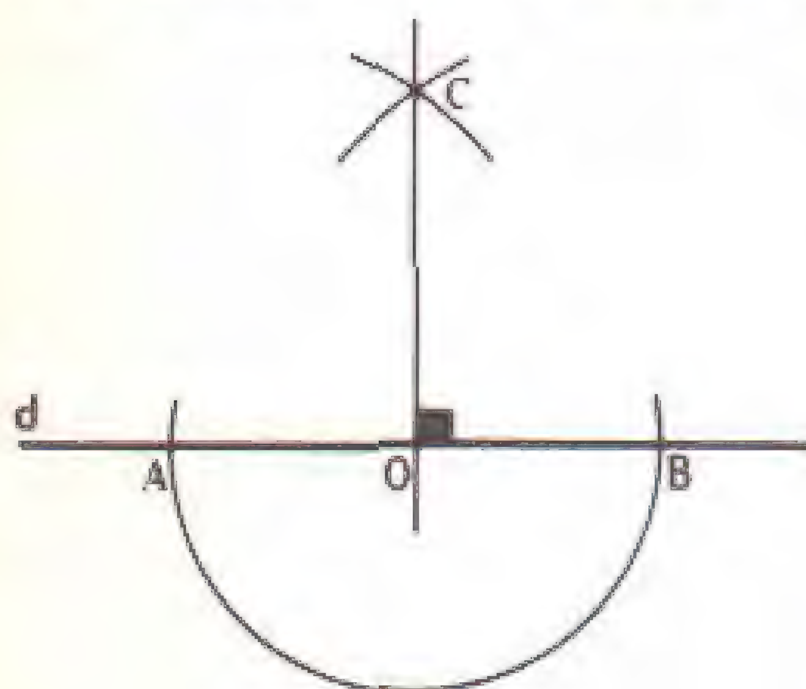
۷– پاره‌خطهایی که از یك نقطهٔ واقع برارتفاع یك مثلث متساوی‌الساقین بردو ساق آن عمود می‌شوند ، مساوی یکدیگرند .

۲- خطهای عمود برهم

(۲-۱) - یادآوری و شناسایی- قبلا گفتیم دو خط وقتی بر یکدیگر عمودند که از برخورد آنها دو زاویهٔ مجانب متساوی پدید آیند. می‌دانیم که در این صورت هر چهار زاویهٔ کوژی که از تلاقی دو خط پدید می‌آیند مساوی یکدیگرند و هریک از آنها یك زاویهٔ قائمه است.

مسئله - می‌خواهیم از نقطهٔ O واقع برخط d خطی عمود بر آن رسم کنیم.

حل - برای این منظور دو پاره‌خط متساوی OA و OB را در دو طرف نقطهٔ O بر خط d جدا می‌کنیم (شکل ۳-۲۲)؛ به مرکزهای A و B و یك شعاع دلخواه دو دایره چنان رسم می‌کنیم که در نقطه‌ای مانند C مشترك باشند (شعاع مشترك این دایره‌ها می‌تواند کاملا اختیاری باشد؟)؛ نقطهٔ C را به نقطهٔ O وصل می‌کنیم، $OC \perp d$ است (چرا؟).



شکل (۲-۲۲)

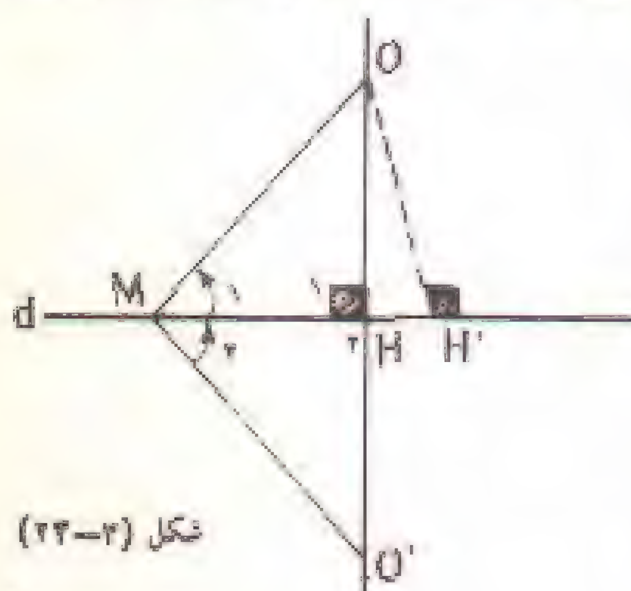
ملاحظه می‌شود که OC نیمساز زاویهٔ نیم‌صفحه AOB است و می‌دانیم که هر زاویه فقط یك نیمساز دارد. بنا براین می‌توان گفت:

قضیه ۱ - در هر صفحه از هر نقطهٔ واقع بر خطی، یك خط، و فقط یك خط عمود بر آن می‌توان رسم کرد.

حال ثابت می‌کنیم که:

قضیه ۲ - در هر صفحه از هر نقطهٔ واقع در خارج یك خط راست، یك خط، و فقط یك خط عمود بر آن می‌توان رسم کرد.

برهان - نقطهٔ دلخواه M واقع بر خط d را به نقطهٔ O وصل می‌کنیم. اگر نیم خط OM بر خط d عمود باشد، درستی قسمت اول حکم ثابت است. و اما اگر OM بر خط d عمود نباشد $\angle M_2$ را به رأس M ومساوی $\angle M_1$ بر d و در طرف دیگر آن بنا کسرده و بر ضلع دوم

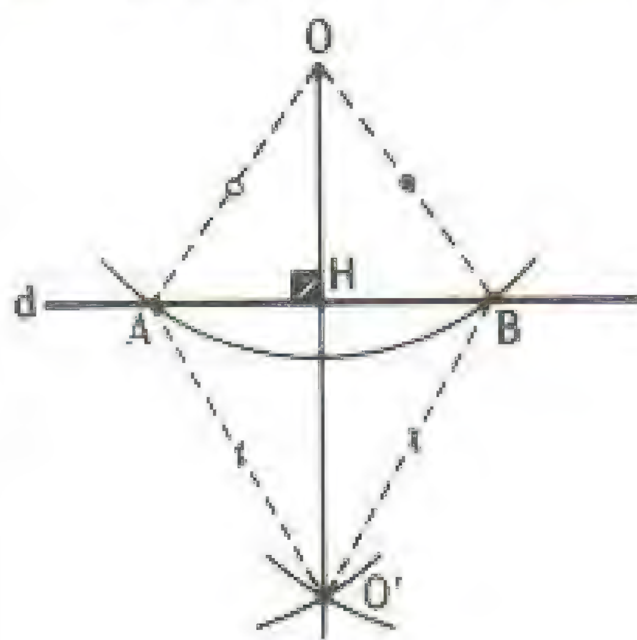


شکل (۲-۲۳)

این زاویه پاره خط MO' را مساوی MO جدا می‌کنیم و نقطهٔ O' را با خط راستی بـه نقطهٔ O وصل‌می‌نماییم (شکل۳ـ۲۳)؛ پاره‌خط OO' خط d را در نقطه‌ای مانند H قطع می‌کند (چرا ؟) . می‌توان دید که :

$$[(\text{ض ز ض})\quad \triangle O'MH = \triangle OMH] \Longrightarrow (\angle H_1 = \angle H_2) \Longrightarrow OO' \perp d$$

حال باید ثابت‌کنیم عمودی که از نقطهٔ O بر خط d رسم می‌شود فقط یکی است . برای اثبات این موضوع ملاحظه می‌کنیم که اگر خط OH' نیز برخط d عمود بـاشد و H و H' دو نقطهٔ متمایز از خط d باشند ، لزوماً باید مثلثی مانند OHH' وجود داشته بـاشدکه زاویـهٔ خارجی H' آن با زاویهٔ داخلی H که مجاور آن نیست مساوی باشد و این ممکن نیست . پس نقاط H و H' نمی‌توانند دو نقطهٔ متمایز باشند و دو خط OH و OH' که هردو برخط d عمودند برهم منطبق و یك‌خطند ، بنابراین خطی کـه از نقطهٔ O می‌گذرد و برخط d عمود است فقط یکی است .



شکل (۳ـ۲۴)

طریقهٔ دیگر رسم خط عمود ـ برای این که از نقطهٔ O واقع درخارج خط d خطی برآن عمود کنیم ، نقطه‌ای مانند A برخط d درنظر گرفته و به مرکز O و شعاع OA دایره‌ای رسم می‌کنیم که باخط d در نقطهٔ دیگری مانند B مشترك باشد (شکل ۳ـ۲۴) . به مرکزهای A و B و با یك‌شعاع دلخواه‌دودایره رسم می‌کنیم؛ چنان‌که درنقطه‌ای‌مانندO' مشترك‌شوند. نقاط O و O' را به یکدیگر وصل می‌کنیم ، خط OO' برخط d عمود است (چرا؟) .

تمرین

۱ـ نقطه‌ای در درون یك مثلث در نظر گرفته و آن را به دو رأس مثلث وصل می‌کنیم؛ ثابت‌کنید زاویه‌ای‌که دراین نقطه بین دو پاره‌خط مزبـور تشکیل می‌شود از زاویهٔرأس‌سوم بزرگتر است .

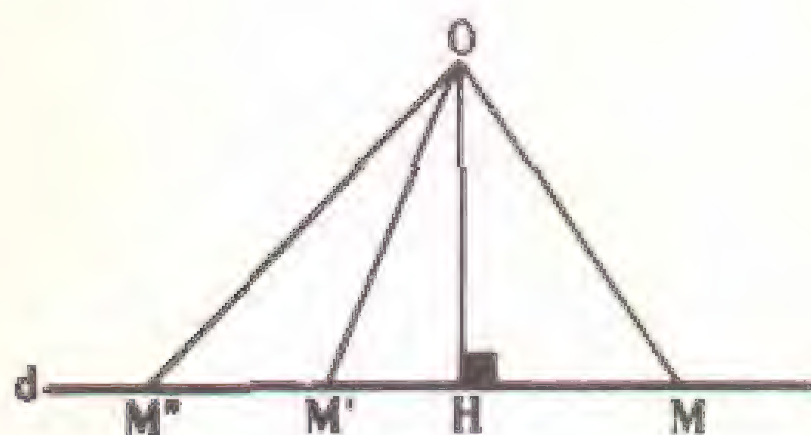
۲ـ در مثلث ABC ، $AB = ۲$ و $AC = ۳$ و $BC = ۴$ سانتیمتر است ، زاویـه‌هـای مثلث را به ترتیب بزرگی اندازهٔ آنها نام ببرید .

۳ـ نقطهٔ P را در داخل مثلث متساوی‌الساقین ABC به رأس A چنان اختیار می‌کنیم که $PC > PB$ باشد ، ثابت‌کنید $\angle PBA > \angle PCA$.

۴ـ با استفاده از خط کش و پرگار مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید که اضلاع زاویهٔ قائمهٔ آن به ترتیب ۳ و ۴ سانتیمتر باشند . اندازهٔ وتر این مثلث را با خط کش مدرج تعیین کنید .

۵ـ مثلث قائم‌الزاویه‌ای بسازید که یك ضلع زاویهٔ قائمهٔ آن سه سانتیمتر و وتر آن ۵ سانتیمتر باشد . پس از رسم مثلث اندازهٔ ضلع سوم آن را با خط کش مدرج تعیین کنید .

۶ـ چهار نیم خط Ox، Oz، Oy و Ot با همین ترتیب درصفحهٔ P واقعند و $Oy \perp Ox$ و $Ot \perp Oz$ ، ثابت کنید $\angle zOx = \angle tOy$.



شکل (۳-۲۵)

(۳-۲) ـ عمود و مایل ـ

ثابت کردیم که از هر نقطهٔ O واقع درخارج هر خط d فقط یك خط OH می‌توان بر آن عمود کرد . پس هر نیم‌خط دیگر OM به مبدأ O که خط d را در نقطه‌ای مانند M قطع کند، برخط d عمود نیست . خطهایی را که از نقطهٔ O می‌گذرند وبرخط d عمود نیستند نسبت به این خط مایل می گوییم . بدیهی است که از هر نقطهٔ O به تعداد بی‌شمار خطهای مایل نسبت به خط d می‌توان رسم کرد (شکل ۳-۲۵) .

محل تقاطع خطهای عمود ومایل نسبت به‌خط d با این خط را پای عمود یا پای مایل می گوییم ، مانند نقاط H و M . فاصلهٔ نقطهٔ O از پای عمود اندازهٔ عمود و فاصلهٔ نقطهٔ O از پای مایل اندازهٔ مایلی که از نقطهٔ O می گذرد نامیده می‌شود. بین اندازه‌های عمود ومایلهایی که از یك نقطه نسبت به یك خط راست رسم شوندرابطه‌هایی‌وجوددارد که آنها را باقضیه‌های زیر بیان می کنیم :

قضیهٔ ۹ـ اگر از یك نقطهٔ O واقع در خارج یك خط، عمود OH و چند مایل نسبت به آن خط رسم کنیم :

۱ ـ اندازهٔ عمود از اندازهٔ هر مایل کوچکتر است .

۲ ـ هر دو مایل که پای آنها از پای عمود به یك فاصله است متساویند .

۳ ـ از دو مایل آن که پایش از پای عمود دورتر است بزرگتر است .

برهان ـ۱ـ اگر OH و OM نسبت به خط d به ترتیب عمود و مایل باشند (شکل۳-۲۶)

در مثلث قائم الزاویه OHM :

$$\angle OMH < \angle H_1 \Longrightarrow OH < OM$$

۲ ـ اگر دو مایل OM و 'OM چنان رسم شده باشند که 'HM = HM باشد :

$$[\triangle OHM = \triangle OHM' \text{ ، (ض ز ض)}] \Longrightarrow OM = OM'$$

۳ ـ در مثلث ONH زاویهٔ $N_۱$ یک زاویهٔ برونی است ، پس :

$$\angle N_۱ > (\angle H_۱ = ۹۰^\circ) \Longrightarrow \angle N_۲ < ۹۰^\circ$$

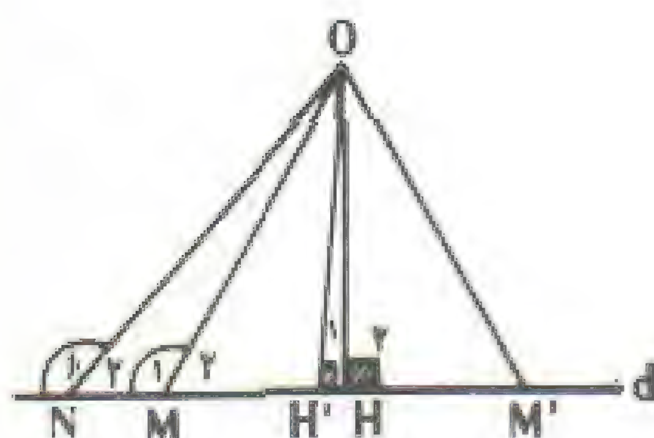
بنابراین می‌توان نوشت :

$$\left.\begin{array}{l}\angle N_۲ < ۹۰^\circ \\ \angle M_۱ > ۹۰^\circ\end{array}\right\} \Longrightarrow \angle M_۱ > \angle N_۲ \Longrightarrow ON > OM$$

قضیهٔ ۴ـ اگر نقطهٔ O در خارج خط d واقع باشد :

۱ ـ کوتاهترین پاره‌خطی که از دو طرف به نقطهٔ O و خط d محدود است ، بر خط d عمود است .

۲ ـ اگر دو مایل که از نقطهٔ O نسبت به خط d رسم می‌شوند متساوی باشند ، پای آنها از پای عمود به‌یک فاصله‌است .



شکل (۳ـ۲۶)

۳ ـ اگر دو مایل که از نقطهٔ O نسبت به خط d رسم می‌شوند مساوی نباشند فاصله پای مایل بزرگتر تا پای عمود بیشتر است از فاصله پای مایل کوچکتر تا پای عمود.

برهان ـ ۱ ـ درشکل (۳ـ۲۶) اگر OH کوتاهترین پاره خط محدود بین نقطهٔO وخط d باشد ، برخط d عمود است ، زیرا که اگر OH برخط d عمود نباشد باید پاره‌خط دیگری مانند 'OH بر d عمود باشد و در آن صورت عمود 'OH از مایل OH کوچکتر خواهد بود و این خلاف فرض است و ممکن نیست . بنابراین 'OH و هر خط دیگری که از نقطهٔ O می‌گذرد نمی‌تواند برخط d عمود باشد و در نتیجه $OH \perp d$ است .

۲ـ در دو مثلث OHM و 'OHM (شکل ۳ـ۲۶) :

$$\left.\begin{array}{r}OM' = OM \\ OH = OH \\ \angle OHM' = \angle OHM = ۹۰^\circ\end{array}\right\} \Longrightarrow \triangle OHM' = \triangle OHM \Longrightarrow HM' = HM$$

۳ـ در شکل (۳ـ۲۶) برای اثبات HN > HM ملاحظه می‌کنیم که اگر HN از HM بزرگتر نباشد ، پس یا برابر آن و یا کوچکتر از آن است . اما چنان که می‌دانیم اگر HN = HM باشد ، آنگاه ON = OM است که خلاف فرض است؛ و اگر HN < HM باشد ، آنگاه ON < OM است که باز خلاف فرض است. یعنی HN نه برابر HM است و نه کوچکتر

از آن، پس HN از HM بزرگتر است.

(۲-۳) ـ فاصله نقطه از خط ـ خط d و نقطه O غیرواقع بر آن داده شده‌اند. از نقطه O خطی بر d عمود می کنیم تا آنرا در H قطع کند. اندازه پاره‌خط OH را فاصله نقطه O از خط d می‌نامیم (شکل ۳-۲۷). فاصله یك نقطه واقع بر یك خط از آن خط را صفر تعریف می کنیم.



شکل (۳-۲۷)

تمرین

۱ـ فاصلهٔ نقطهٔ M از خط d مساوی ۳ سانتیمتر است، نقاطی از خط d مشخص کنید که از نقطهٔ M به فاصلهٔ $۴ \geqslant x \geqslant ۳$ سانتیمتر باشند.

۲ـ نیم‌خط Mx و نقطهٔ O در خارج آن مفروض است چنان که $OM \perp Mx$ است. مجموعهٔ نقاط P از نیم‌خط Mx را تعیین کنید که فاصلهٔ آنها از نقطهٔ O در رابطهٔ $OP \leqslant ۲OM$ صدق کند.

۳ـ ثابت کنید که دو رأس هر مثلث ازمیانهٔ مرسوم از رأس سوم به‌یك فاصله‌اند.

۴ـ اگر از نقطهٔ A عمود AD و مایلهای AC و AB را نسبت به خط d چنان رسم کنیم که $DC = CB$ باشد، ثابت کنید $\angle CAB < \angle DAC$.

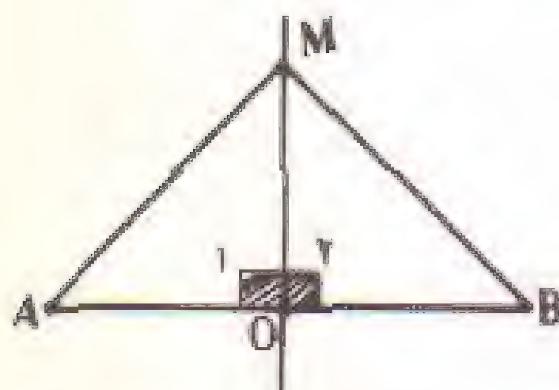
(۲-۴) ـ عمود منصف یك پاره خط ـ عمود منصف هر پاره خط خطی است که از وسط آن پاره‌خط می گذرد و بر آن عمود است. هر پاره‌خط فقط یك عمود منصف دارد (چرا؟). عمودمنصف هر پاره‌خط دارای خواصی است که آنهارا باقضیه‌های زیر بیان می کنیم:

قضیه ۱ ـ هر نقطهٔ واقع بر عمود منصف یك پاره خط از دو سر آن به یك فاصله است.

یعنی:
$$\left.\begin{array}{r} AO=OB \\ OM\perp AB \end{array}\right\} \Longrightarrow (MA=MB)$$

برهان ـ برای اثبات‌قضیه ملاحظه می کنیم که در شکل (۳-۲۸):

$$\left.\begin{array}{r} AO=OB \\ \angle O_1=\angle O_2 \\ OM=OM \end{array}\right\} \Longrightarrow (\triangle MOA=\triangle MOB)$$
$$\Longrightarrow MA=MB$$



شکل (۳-۲۸)

قضیهٔ ۲ (عکس قضیهٔ ۱) - هر نقطه که از دو سر پاره‌خطی به‌یك فاصله باشد، بر عمودـ منصف آن پاره‌خط واقع است.

یعنی در شکل (۳-۲۸) :

$$\left.\begin{array}{r} AO=OB \\ MA=MB \end{array}\right\} \Longrightarrow (OM \perp AB)$$

(اثبات به عهدهٔ دانش آموزان است.)

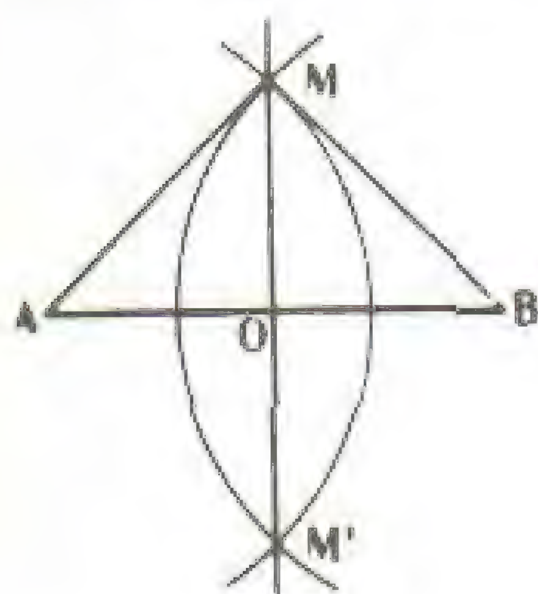
از آنچه ذکر شد می‌توان نتیجه گرفت که :

$$OA=OB \ ; \ OM \perp AB \Longleftrightarrow MA=MB$$

با توجه به رابطه‌های فوق گاهی دو قضیهٔ ۱ و ۲ را با هم و به‌صورت زیر بیان می‌کنیم:

قضیه - هر نقطهٔ واقع بر عمود منصف یك پاره‌خط، از دو سر آن به‌یك فاصله است و به‌عکس.

رسم عمود منصف یك پاره خط - برای رسم عمودمنصف یك پاره‌خط کافی است دو نقطه از آن را مشخص کنیم. اگر به‌مرکزهای A و B و به‌یك شعاع دو دایره رسم کنیم که نقطهٔ مشترك داشته باشند، آن نقطه از A و B به‌یك فاصله است و بنابراین نقطه‌ای از عمود منصف پاره‌خط AB است. پس اگر دو نقطه از عمودمنصف را به همین طریق مشخص کرده و به یکدیگر وصل کنیم، عمودمنصف پاره‌خط AB رسم می‌شود (شکل ۳-۲۹).



شکل (۳-۲۹)

می‌توان ملاحظه نمود که دودایرهٔ مزبور درصورتی نقطهٔ مشترك خواهند داشت که اندازهٔ شعاع مشترك آنها را چنان اختیار کرده باشیم که مثلث AMB پدید آید و برای این منظور باید داشته باشیم:

$$(MA+MB>AB) \Longrightarrow (2AM>AB) \Longrightarrow (AM>\tfrac{1}{2}AB)$$

بنابراین برای رسم عمود منصف شعاع دایره‌های مزبور را بزرگتر از نصف پاره خط AB (مثلاً تمام AB) باید در نظر گرفت و در این صورت دو دایره دو نقطهٔ مشترك M و M' دارند و MM' عمود منصف پاره خط AB، با این دو نقطه مشخص می‌شود.

(۲-۵) - شرط لازم و کافی - اگر یك قضیه وعکس آن هردو درست باشند، هریك از دوقسمت قضیه را (فرض ونتیجه) شرط کافی ولازم برای قسمت دیگر آن می‌گوییم و دراین حالت قضیه وعکس آن را با یك گزارهٔ دوشرطی بیان می‌کنیم. چنان‌که می‌توان قضایای فوق را

به‌هریک از صورتهای زیر بیان کرد:

۱ـ اگر نقطه‌ای برعمودمنصف یك پاره‌خط واقع باشد، ازدو سر آن پاره‌خط به یك فاصله است وبه عکس.

۲ـ نقطه‌ای از دوسر یك پاره خط به‌یك فاصله است اگر و تنها اگر برعمود منصف آن پاره خط واقع باشد.

۳ـ شرط لازم و کافی برای آن که نقطه‌ای برعمودمنصف پاره‌خطی واقع باشد آن است که از دوسر آن پاره‌خط به یك فاصله باشد.

مثال ۴ ـ ثابت کردیم که در هرمثلث ABC:

$AB = AC \Longrightarrow \angle C = \angle B$

$\angle C = \angle B \Longrightarrow AB = AC$

از ترکیب این دو رابطه می‌توان داشت: $\triangle ABC : [AB = AC \Longleftrightarrow \angle C = \angle B]$

یعنی تساوی دو ضلع مثلث شرط لازم وکافی برای تساوی دو زاویهٔ مقابل بـه آن دو ضلع است و تساوی دو زاویه از مثلث شرط لازم وکافی برای تساوی دو ضلع مقابل به آن دو زاویه یعنی متساوی‌الساقین بودن آن است.

تمرین

۱ـ کدام یك از گزاره‌های زیر درست وکدام یك نادرست است؟

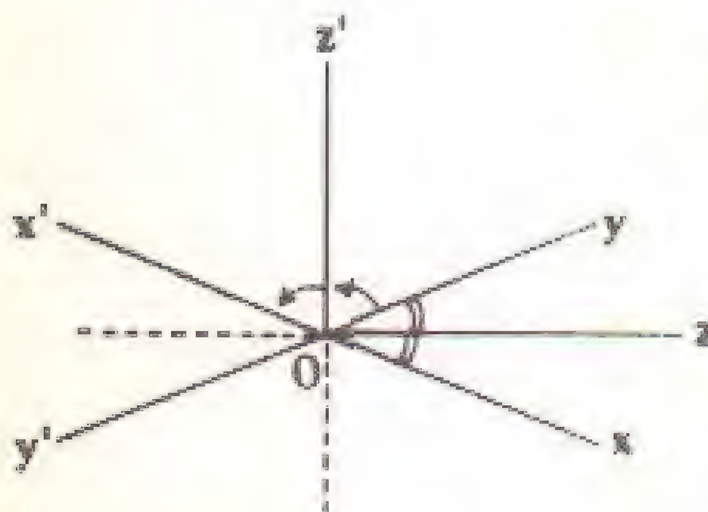
ـ عمود منصف هرپاره خط تنها خطی است که بر وسط آن پاره خط می‌گذرد. ـ عمود منصف هرپاره‌خط تنها خطی است که همهٔ نقاط آن از دوسرپاره خط به‌یك فاصله‌اند. ـ عمود منصف هرپاره خط تنها خطی است که هرنقطه‌اش از دوسر پاره خط به‌یك فاصله است.

ـ $(O \in AB \,,\, AO = OB \,,\, OC \perp AB) \Longrightarrow CA \neq CB$

۲ـ ثابت کنید هرگاه عمودمنصفهای دو ضلع مثلثی در نقطه‌ای مـانند O متقاطع باشند، نقطهٔ O از سه رأس مثلث به یك فاصله است.

(۲ـ۶) ـ نیمسازهای زاویه‌های بین دوخط

بین دوخط ـ دوخـط $x'x$ و $y'y$ را کـه در نقطه O مشترکند درنظرمی‌گیریم (شکل ۲ـ۳۵). چنان که می‌دانیم دو نیم‌خط Oz و Oz' وجـود دارند که یکی $\angle xOy$ و دیگری زاویهٔ مجانب آن یعنی $\angle yOx'$ را نصف مـی کند وآنهـا را نیمسازهای زاویه‌های بین‌دوخط مزبورمی گوییم.



شکل (۲ـ۳۵)

نیمسازهای زاویه‌های بین دو خط دارای خواصی هستند که آنها را با قضایای زیر بیان می‌کنیم .

قضیهٔ ۱ - هر نقطهٔ واقع بر نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است .

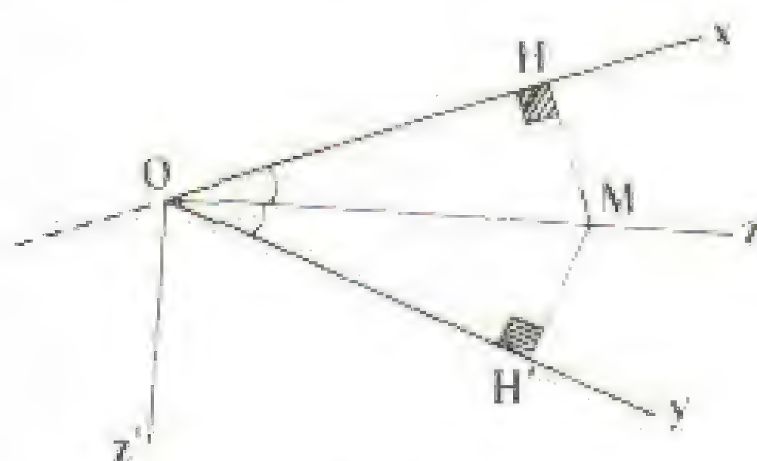
یعنی در شکل (۳-۳۱) :

$$\left.\begin{array}{c}\angle xOz=\angle yOz\\ M\in Oz\\ MH\perp Ox, MH'\perp Oy\end{array}\right\}\Longrightarrow MH=MH'$$

برهان - برای اثبات قضیه ملاحظه می‌کنیم که در دو مثلث OHM و OH'M :

$$\left.\begin{array}{c}90^{\circ}=\angle MHO=\angle MH'O\\ OM=OM\\ \angle MOH=\angle MOH'\end{array}\right\}\Longrightarrow\triangle MOH=\triangle MOH'\Longrightarrow MH=MH'$$

قضیه ۲ (عکس قضیهٔ ۱) - هر نقطه که از دو خط متقاطع به یک فاصله باشد، بر نیمساز یکی از زاویه‌های بین آن دو خط واقع است .



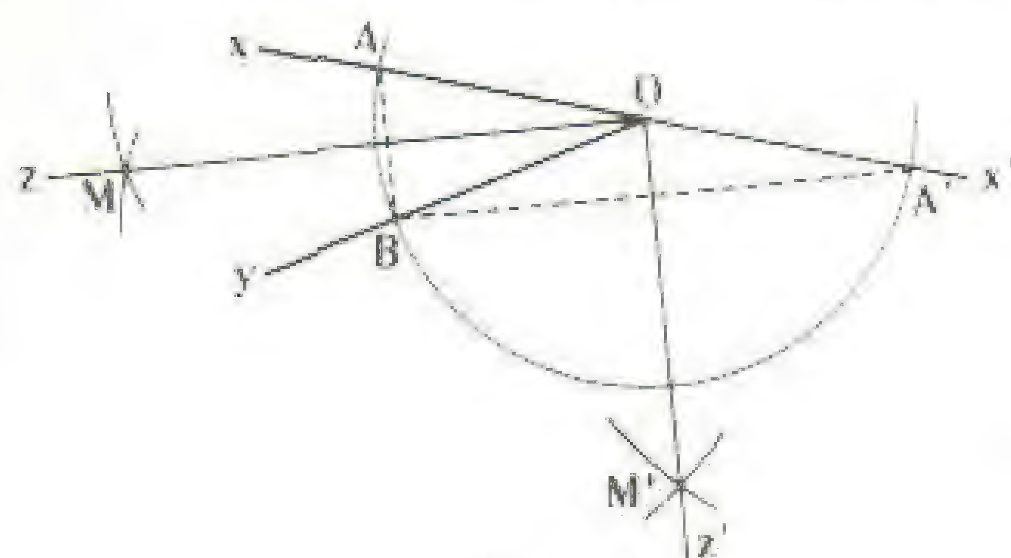
شکل (۳-۳۱)

با توجه به شکل (۳-۳۱) قضیه را با نمادهای ریاضی بیان کنید و بعد ثابت کنید .

از آنچه ذکر شد می‌توان دید که در اینجا نیز یک قضیه و عکس آن هر دو درست هستند ؛ یعنی دو قضیهٔ یک شرطی بالا را به صورت یک قضیهٔ دو شرطی یا به صورت یک شرط لازم و کافی به شرح زیر می‌توان بیان کرد :

قضیه - شرط لازم و کافی برای آن که نقطه‌ای از دو خط متقاطع به یک فاصله باشد ، آن است که بر نیمساز یکی از زاویه‌های بین آنها واقع باشد .

رسم نیمسازهای زاویه‌های بین دو خط - برای رسم نیمساز زاویهٔ بین دو نیم‌خط Ox و Oy بر آنها دو پاره‌خط مساوی OA و OB را با رسم دایره‌ای به مرکز O و شعاع دلخواه جدا می‌کنیم (شکل ۳-۳۲) .



شکل (۳-۳۲)

با ملاحظهٔ آن که مثلث AOB متساوی‌الساقین است ، نیمساز زاویهٔ xOy باید عمود منصف

پاره‌خط AB باشد. پس اگر به‌مرکزهای A و B و یک شعاع دلخواه بزرگتر از $\frac{1}{2}$AB دو دایره رسم کنیم که یکدیگر را در نقطهٔ M قطع کنند، OM نیمساز xOy∠ مشخص می‌شود.

می‌توان دید که دایرهٔ به‌مرکز O و شعاع OA نیم‌خط 'Ox را هم در نقطهٔ 'A قطع می‌کند و 'Oz عمود منصف پاره‌خط 'BA نیمساز زاویهٔ دیگر بین دو خط مزبور است و بر Oz عمود است (چرا؟).

قضیه- نیمسازهای دو زاویه مجانب برهم عمودند. (اثبات به عهدهٔ دانش‌آموزان است).

(۲ - ۷) - مکان هندسی - دیدیم که هر نقطه از عمود منصف یک پاره خط از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است و هر نقطهٔ صفحه که از دو سر پاره‌خطی به یک فاصله باشد، عضوی از مجموعهٔ نقاط عمود منصف آن پاره خط می‌باشد. گوئیم، عمود منصف هر پاره‌خط یک مکان هندسی است و مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله‌اند.

به طور کلی یک مجموعه وقتی مکان هندسی است که:

۱- همهٔ نقاط آن دارای خاصیت معینی باشند.

۲- هر نقطه که خاصیت مزبور را داشته باشد، عضو آن مجموعه باشد.

تمرین

۱- عبارات زیر را چنان کامل کنید که هر یک گزاره‌ای درست باشد:

الف) هر نقطه که از دو ضلع زاویه‌ای به یک فاصله نباشد، بر نیمساز آن زاویه ...

ب) هر نقطه که از یک ضلع و از امتداد ضلع دیگر زاویه‌ای به یک فاصله باشد...

ج) شرط لازم و کافی برای آن که نقطه‌ای بر یکی از نیمسازهای زاویه‌های بین دو خط واقع باشد آن است که...

د) عمود منصف هر پاره‌خط مکان هندسی نقاطی است که...

ه) مکان هندسی نقاطی که از دو ضلع زاویه‌ای به یک فاصله باشند...

۲- با پرگار و خط‌کش و به کمک احکامی که ثابت کرده‌ایم:

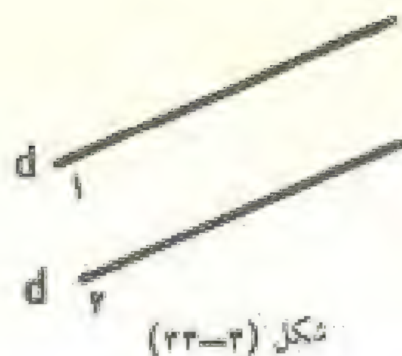
یک زاویه به‌اندازهٔ °۴۵ رسم کنید. - زاویه‌ای به‌اندازهٔ °۲۵ رسم کنید. - زاویه‌ای رسم کنید که اندازهٔ آن °۱۳۵ باشد. - زاویه‌ای به اندازهٔ °۷۵ رسم کنید.

۳- مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید که یکی از اضلاع زاویهٔ قائمهٔ آن ۴ سانتیمتر و زاویهٔ حادهٔ مجاور این ضلع آن °۴۵ باشد. پس از ترسیم مثلث، اندازهٔ ضلع قائم دیگر آن را با خط‌کش مدرج و اندازهٔ زاویهٔ حادهٔ دیگرش را با نقاله تعیین کنید.

۴- مثلثی رسم کنید که در آن اضلاع b = ۳ سانتیمتر و c = ۴ سانتیمتر و $\hat{A}$ = °۶۰ باشد.

۵- مثلثی رسم کنید که در آن $\hat{A}$ = °۹۰ و ضلع AB = ۵ سانتیمتر و نیمساز A∠ مساوی ۴ سانتیمتر باشد.

۳- خطهای موازی در صفحه



شکل (۳-۳۳)

(۳-۱)- تعریف خطهای موازی-

دو خط واقع بریک صفحه راموازی می گوئیم (شکل ۳-۳۳) هرگاه آن دو خط یا برهم منطبق باشند و یا هیچ نقطه مشترکی نداشته‌باشند. موازی بودن دو خط d_1 و d_2 را با $d_1 \parallel d_2$ نمایش میدهیم.

پاره خطهای موازی - دو پاره خط را موازی گوئیم هرگاه امتدادهای آنها با هم موازی باشند.

اصل موضوع توازی (اصل اقلیدس) - خط d و نقطه O غیرواقع بر آن در یک صفحه داده شده‌اند. از نقطه O یک خط و تنها یک خط می‌توان موازی d رسم کرد.

اقلیدس در کتاب اصول اصل توازی را بابیان دیگری عنوان می کند. اما از بیان مزبور نیز همین معنی حاصل می‌شود.

ازاصل توازی احکام متعدد می‌توان نتیجه گرفت و بعضی از این احکام در وضعی هستند که اگر به‌عنوان اصل موضوع اختیار شوند، اصل توازی اقلیدس را برمبنای آنهامی‌توان ثابت کرد.

(۳-۲) - نتیجه‌هایی از اصل توازی

دراین فصل مهمترین نتایج اصل توازی را در مورد خطوط واقع دریک صفحه مطالعه می کنیم.

قضیهٔ ۱ - در هر صفحه دو خط موازی با یک خط، موازی یکدیگرند (خاصیت ترایائی توازی).

یعنی: $(d,d',d''\subset p; d'\parallel d \text{ و } d\parallel d'')\Longrightarrow d'\parallel d''$

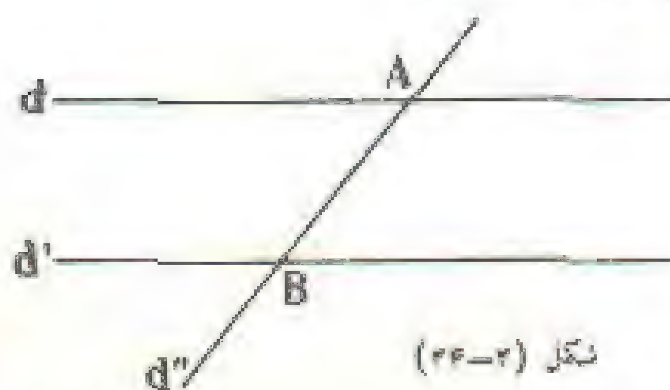
برهان - اگر دو خط d' و d''، در نقطه‌ای متقاطع باشند، از آن نقطه دو خط موازی d رسم شده است و این مخالف اصل توازی است وقابل قبول نیست، پس $d'\parallel d''$

قضیهٔ ۲ - در هر صفحه اگر خطی یکی از دو خط متوازی را قطع کند، دیگری را نیز قطع می کند.

یعنی: $(d,d',d''\subset p; d\parallel d' \text{ و } d''\nparallel d)\Longrightarrow d''\nparallel d'$

برهان - دوخط d' و d'' (شکل ۳-۳۴)، باید متوازی یا متقاطع باشند، اما اگر $d''\parallel d'$، خواهیم داشت:

$$\left.\begin{matrix} d\parallel d' \\ d''\parallel d' \end{matrix}\right\} \Longrightarrow d''\parallel d$$



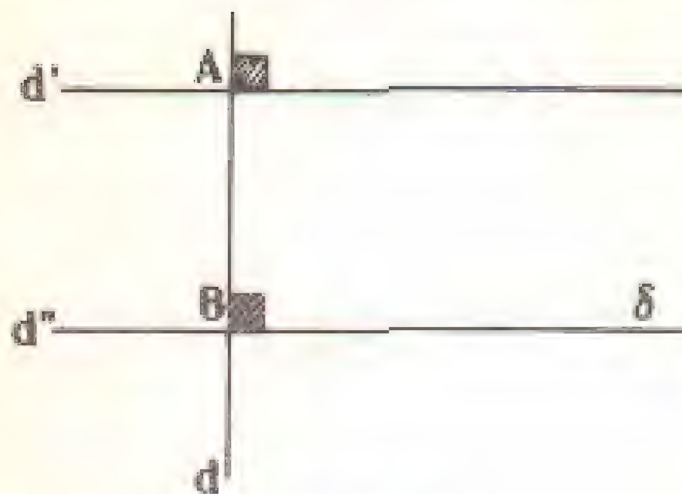
شکل (۳-۳۴)

و این مخالف فرض است ، پس $d'' \nparallel d'$.

قضیهٔ ۳ ـ در هر صفحه دو خط عمود بر یک خط ، موازی یکدیگرند .

یعنی: $(d,d',d'' \subset p; d' \perp d, d'' \perp d) \Longrightarrow d' \| d''$

برهان ـ دوخط d' و d'' در یک صفحه‌اند تقاطع آنها در یک نقطه ایجاب می کند که از آن نقطه دو خط عمود بر d رسم شده بـاشد و این ممـکن نیست ، پس متقـاطع نیستند ، بنابـراین $d' \| d''$ (شکل ۳ـ۳۵) .



شکل (۳ـ۳۵)

قضیهٔ ۴ ـ در هر صفحه اگر خطی بر یکی از دوخط متوازی عمود باشد، بر دیگری نیز عمود است .

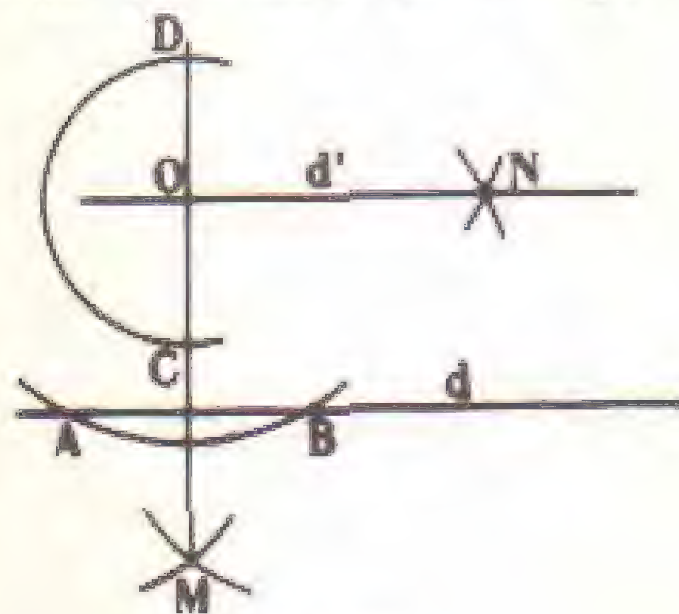
یعنی: $(d,d',d'' \subset p; d' \| d'', d \perp d') \Longrightarrow d \perp d''$

برهان ـ خط d که بر d' عمود است آن را در نقطه‌ای چون A قطع می کند . بنابراین باموازی آن خط d'' نیز در نقطه‌ای چون B مشترک است . اگر خط d'' بر خط d عمود نباشد، در نقطهٔ B خطی مانند δ بر d عمود می کنیم(شکل ۳ـ۳۵). دراین صورت می‌توان داشت:

$$\left.\begin{array}{l}\delta \perp d \\ d' \perp d\end{array}\right\} \Longrightarrow \delta \| d'$$

اما از نقطهٔ B بیش از یک خط موازی d' نمی گذرد، پس $\delta \equiv d''$ وبنابراین $d'' \perp d$.

مسئله ـ می‌خواهیم از نقطهٔ O واقع در خارج خط d خطی موازی آن رسم کنیم .



شکل (۳ـ۳۶)

حل : **با استفاده از پرگار** ـ به مرکز O و شعاع دلخواه دایره‌ای رسم می‌کنیم که خط d را در دو نقطهٔ A و B قطع کند شکل(۳ـ۳۶) . خط OM عمود منصف پاره‌خط AB را رسم می کنیم و خط d' را از نقطهٔ O عمود بر OM رسم می‌نماییم . این خط موازی d و جواب مسئله است (چرا؟) .

تمرین

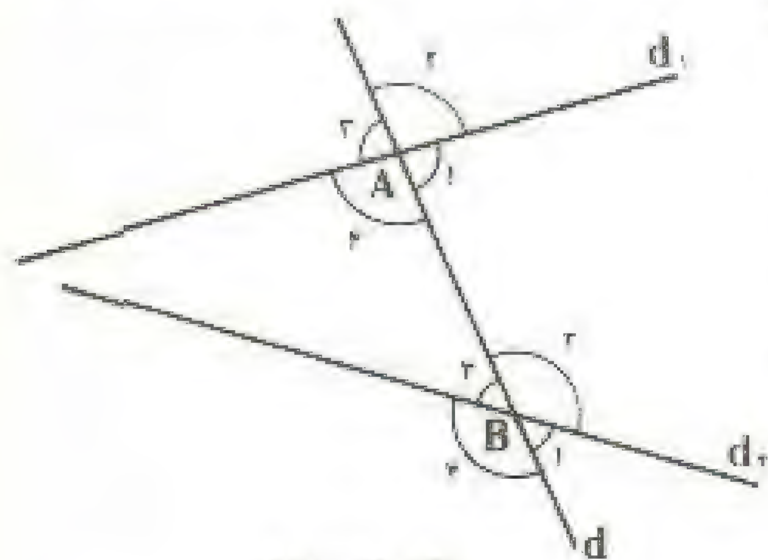
۱ـ هرگاه از دو نقطهٔ M و N خارج خط مفروض d دو خط 'd و "d را موازی با d رسم کنیم و $d' \equiv d''$ شود، در بارهٔ نقاط M و N چه حکمی می‌توانید بیان کنید.

۲ـ کدام یك از گزاره‌های زیر درست و کدام یك نادرست است؟

ـ ازهر نقطهٔ واقع بر یك خط راست فقط یك خط موازی آن مرور می‌کند. ـ اصل موضوع گزاره‌ای است که درستی آن را بدون برهان می‌پذیریم و بر گزاره‌های قبلی بنا نمی‌شود. ـ اگر خطی یکی از دو خط موازی را قطع کند، بر دیگری عمود است. ـ اگر خطی بر یکی از دو خط موازی عمود باشد، دیگری را قطع می‌کند. ـ دو خط عمود بر یك خط متقاطع نیستند. ـ در هر صفحه همهٔ خطهای عمود بر یك خط با یکدیگر موازیند.

۳ـ خط d و نقطهٔ M را در خارج آن درنظر گرفته به وسیلهٔ تا کردن یك قطعه کاغذ و ساختن گونیای کاغذی از نقطهٔ M خطی رسم کنید که بر خط d عمود باشد.

(۳ـ۳) ـ زاویه‌های متبادل و متقابل. هرگاه خطی دو یا چند خط دیگر را قطع کند، آن را مورب می‌نامیم. هرگاه مورب d دو خط d_1 و d_2 را بـه ترتیب در دو نقطهٔ متمایز A و B قطع کند، در هر یك از این دو نقطه چهـار زاویه و روی هم هشت زاویه پدید می‌آیند شکل (۳ـ۳۷). از این هشت زاویه هر جفت زاویه‌ای را که یکی به رأس A و دیگری به رأس B است برحسب آن‌که هردو در یك طرف خط d یا در دو طرف آن، یا هردو بین دو خط d_1 و d_2 یا در خارج آنها باشند، به نامهای مختلف می‌نامیم، بدین شرح:



شکل (۳ـ۳۷)

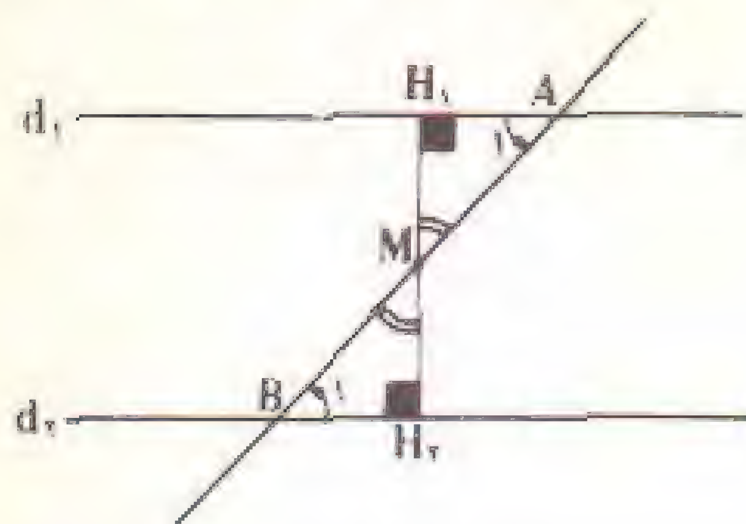
هردو زاویه که در یك طرف مورب d واقع باشند متقابل و هردو زاویه که در دو طرف مورب d واقع باشند متبادل نامیده می‌شوند.

دو زاویهٔ متبادل یا متقابل را در صورتی که هر دو بین دو خط d_1 و d_2 یا درخارج آنها یا یکی بین دو خط و دیگری درخارج آنها باشند، متبادل یا متقابل داخلی یا خارجی یا داخلی وخارجی می‌گوئیم. بدین ترتیب در شکل (۳ـ۳۷): زاویه‌های A_1 و B_3 متبادل داخلی، زاویه‌های A_1 و B_2 متقابل داخلی، زاویه‌های A_2 و B_3 متبادل داخلی وخارجی هستند. درحالتی که دو خط d_1 و d_2 موازی باشند، بین زاویه‌های متبادل و متقابل رابطه‌های مهمی برقرار است که آنها را در این فصل مطالعه می‌کنیم.

قضیهٔ اصلی - زاویه‌های متبادل داخلی که از تقاطع دو خط موازی با خط سومی پدید می‌آیند مساوی یکدیگرند.

یعنی: $\angle B_1 = \angle A_1 \Longleftarrow (\angle A_1 , \angle B_1$ متبادل داخلی و $d_1 \| d_2)$

برهان - اگر از نقطهٔ M وسط پاره خط AB در شکل (۳-۳۸)، خط MH_1 را عمود بر خط d_1 رسم کنیم، امتداد آن بر خط d_2 نیز عمود است (چرا؟). اگر H_2 پای عمود باشد، $\triangle MH_1A = \triangle MH_2B$ (چرا؟)؛ و از آنجا: $\angle A_1 = \angle B_1$.



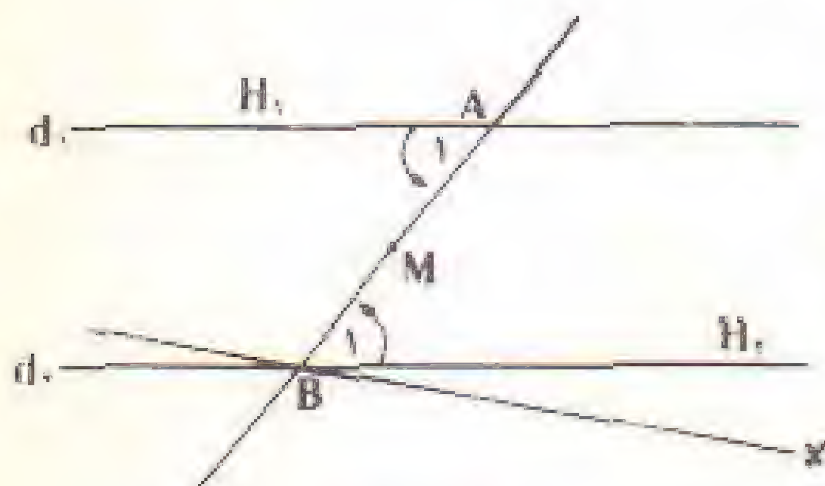
شکل (۳-۳۸)

قضیهٔ عکس - اگر در یک صفحه دو خط را خط سومی قطع کند و دو زاویهٔ متبادل داخلی متساوی باشند، دو خط مزبور موازی یکدیگرند.

یعنی در شکل (۳-۳۹):

$(\angle MAH_1 = \angle MBH_2) \Longrightarrow d_2 \| d_1$

برهان - از نقطهٔ B خط Bx را موازی d_1 رسم می‌کنیم. به موجب قضیهٔ قبل خواهیم داشت: $\angle MAH_1 = \angle MBx$؛ بنابراین می‌توان نوشت:



شکل (۳-۳۹)

$$\left.\begin{array}{l} \angle MAH_1 = \angle MBH_2 \\ \angle MAH_1 = \angle MBx \end{array}\right\} \Longrightarrow \angle MBH_2 = \angle MBx \Longrightarrow Bx \equiv d_2$$

یعنی خطی که از نقطهٔ B موازی d_1 رسم شود، همان d_2 است. پس: $d_2 \| d_1$.

از دو قضیهٔ بالا می‌توان حکم کلی زیر را نتیجه گرفت:

قضیه - شرط لازم و کافی برای آن که دو خط موازی باشند آن است که اگر خط سومی آنها را قطع کند، زاویه‌های متبادل داخلی متساوی باشند.

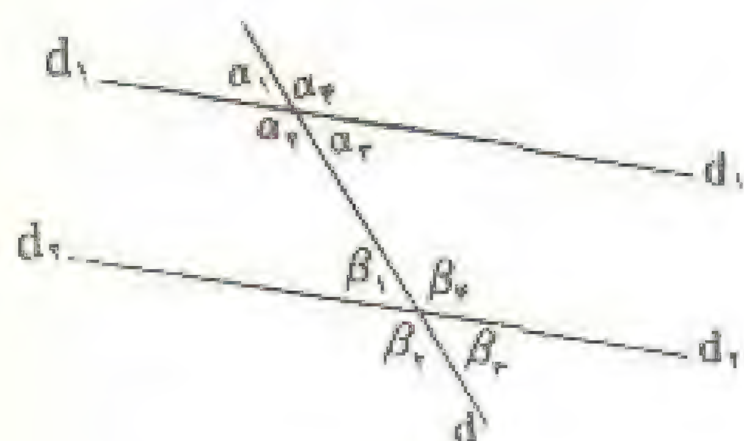
از این قضیه گزاره‌های زیر نتیجه می‌شوند که بر اصل توازی مبتنی هستند:

۱- اگر دو خط موازی را خط سومی قطع کند، دو زاویهٔ متقابل داخلی مکمل یکدیگرند

و بعکس .

۲ـ اگر دو خط را خط سومی قطع کند دو زاویهٔ متقابل داخلی و خارجی متساویند و بعکس .

تمرین



شکل (۳ـ۴۰)

۱ـ دو خط موازی d_1 و d_2 را مطابق شکل (۳ـ۴۰) مورب d قطع کرده است و زاویه‌هایی پدید آمده‌اند که در شکل نامگذاری شده‌اند . بر صفحهٔ کاغذ جدولی طبق جدول مقابل و با اندازهٔ بزرگتر رسم کرده زاویه‌هایی را که در هر سطر و ستون نام آنها نوشته شده است مقایسه کنید . وضع آنها را در محل تلاقی سطر و ستون مربوط ثبت کنید و رابطهٔ بین اندازه‌های هر دو زاویه را بیان کنید. (جدول ۳ـ۴۱) .

	α_1	α_2	α_3	α_4
β_1				
β_2				
β_3				
β_4				

جدول (۳-۴۱)

۲ـ اگر دو خط موازی را خط سومی قطع کرده باشد ، کدام یك از گزاره‌های زیر درست و کدام یك نادرست است ؟

ـ زاویه‌های متبادل خارجی مکملند . ـ زاویه‌های متقابل خارجی متساویند . ـ زاویه‌های متبادل داخلی خارجی مکمل یکدیگرند .ـ زاویه‌های متبادل داخلی مکمل یکدیگرند .ـ زاویه‌های متقابل داخلی متساویند .

۳ـ خط d و نقطهٔ O را در خارج آن در نظر گرفته به کمك خط‌کش و پرگار و با ترسیم زاویه‌های متبادل متساوی از نقطهٔ O خطی بگذرانید که با خط d موازی باشد .

۴ـ دو خط موازی را خط سومی قطع کرده است . ثابت کنید نیمسازهای زاویه‌های متبادل داخلی یا خارجی موازی یکدیگرند . آیا عکس این گزاره نیز درست است ؟ عکس این گزاره را بنویسید .

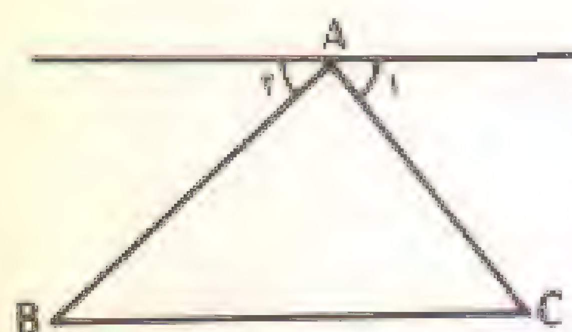
۵ـ ثابت کنید اگر از نقطهٔ D محل تلاقی نیمساز زاویهٔ A از مثلث ABC با ضلع BC دو خط موازی اضلاع AB و AC رسم کنیم تا دو ضلع مثلث را در نقاط M و N قطع کنند ، $AM = AN$ و $DM = DN$

۶ـ درصفحهٔ p دونقطهٔ A و B ازخط d به یك فاصله ودر یك طرف آن واقعند . ثابت

کید $d \parallel AB$ است .

۷ ـ مکان هندسی نقاطی از یك صفحه را تعیین کنید که از یك خط d واقع بر آن صفحه به یك فاصله باشند. (مسئله چند جواب دارد ؟ چرا؟)

(۳-۴) ـ مجموع زاویه‌های یك چند ضلعی

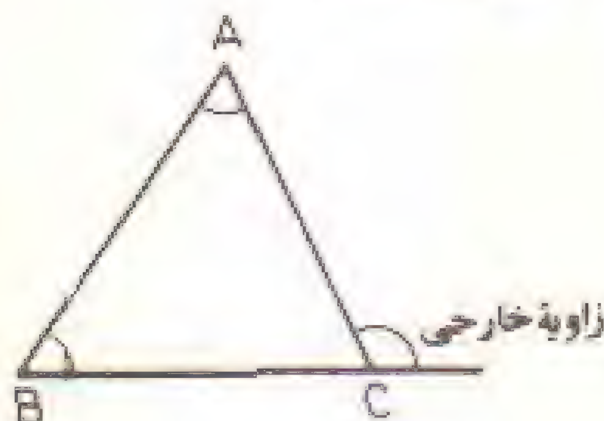


شکل (۳-۴۲)

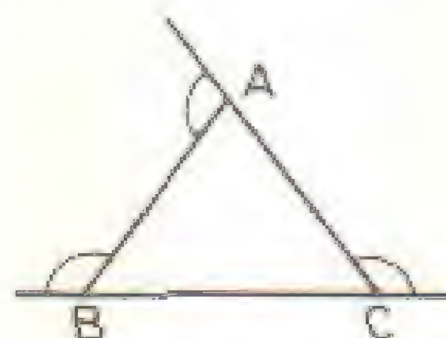
قضیهٔ ۱ ـ مجموع زوایای داخلی هرمثلث ۱۸۰ درجه‌است.

برهان ـ در مثلث ABC شکل (۳ ـ ۴۲) از رأس A خطی موازی ضلع BC رسم می‌کنیم ، دو زاویهٔ متبادل داخلی $\angle A_1$ و $\angle C$ و همچنین $\angle A_2$ و $\angle B$ با هم برابرند ، باین ترتیب مجموع‌زوایای مثلث مساوی بـا یك زاویهٔ نیم صفحه یعنی ۱۸۰ درجه است .

نتیجه ـ زاویه‌ای که ازامتداد یك ضلع مثلث‌با ضلع مجاورش ایجادمیشود،زاویه‌خارجی مثلث خوانده میشود شکل (۳-۴۳). در هر مثلث اندازهٔ هر زاویهٔ خارجی برابراست بامجموع اندازه‌های دو زاویهٔ داخلی غیر مجاور آن . چرا؟ شکل (۳-۴۴)



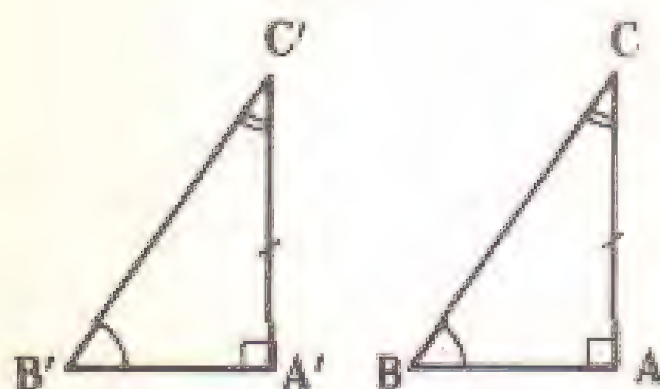
شکل (۳-۴۴)



شکل (۳-۴۳)

حال می‌توانیم قضیهٔ زیر را که قبلا بدون اثبات بیان کردیم ثابت کنیم .

قضیهٔ ۲ ـ اگردر دومثلث قائم الزاویه‌یك ضلع زاویهٔقائمه وزاویهٔ مقابل به‌آن‌ضلع‌ازیکی، بایك ضلع‌زاویهٔ قائمه و زاویهٔ مقابل به‌آن‌ضلع ازمثلث دیگر برابر باشندآندو مثلث برابرند.



شکل (۳-۴۵)

برهـان ـ چـون $\angle B = \angle B'$ و $\angle A = \angle A' = 90$ با در نظر گرفتن قضیهٔ قبل $\angle C = \angle C'$ می‌شود و دو مثلث در حالت (ز ض ز) با هم برابرند . شکل (۳-۴۵)

تمرین

۱ـ آیا می‌توان مثلثی رسم کرد که دو زاویهٔ قائمه یا دو زاویهٔ منفرجه داشته باشد؟ چرا؟

۲ـ یک زاویهٔ داخلی یا خارجی مثلث متساوی‌الاضلاع چند درجه است؟

۳ـ زاویهٔ رأس یک مثلث متساوی الساقین °۶۰ است ، هر زاویهٔ مجاور قاعده چند درجه است؟

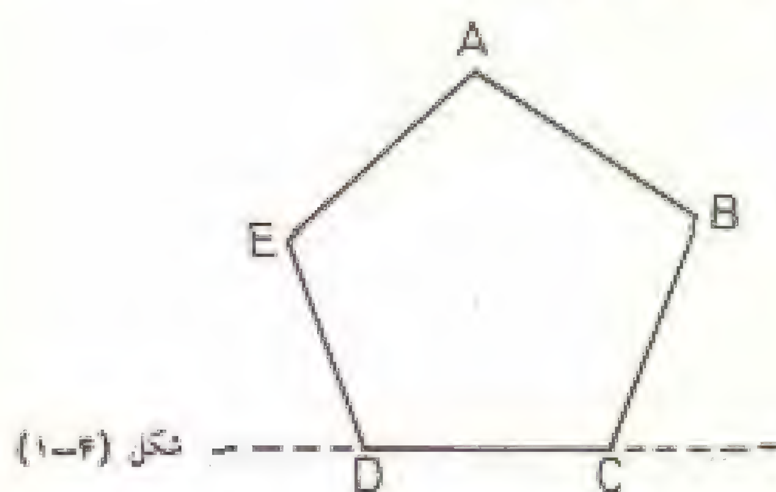
۴ـ اندازه‌های سه‌زاویهٔ مثلثی با اعداد ۲ و ۳ و ۵ متناسبند؛ زاویه‌های مثلث را حساب کنید .

۵ـ درمثلث قائم‌الزاویه‌ای یکی از زاویه‌های حاده دوبرابر دیگری است اندازهٔ زاویه‌های مثلث را حساب کنید.

فصل چهارم

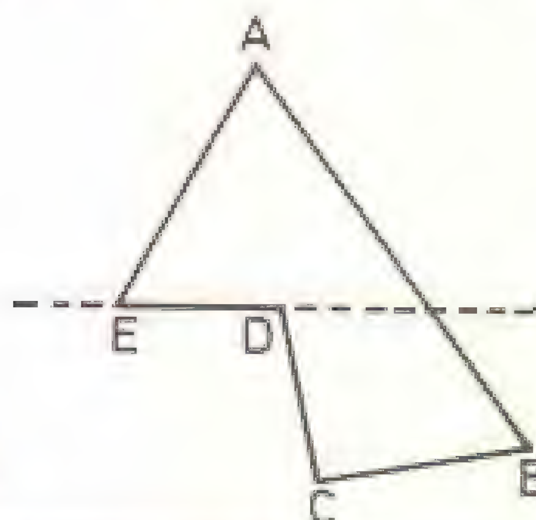
۱ـ چند ضلعیها

(۱-۱) ـ چند ضلعی‌های محدب ومقعر ـ هر خط شکسته[۱] بسته را چند ضلعی می‌نامند. اگرهرضلع یك چند ضلعی را ازدوطرف امتداد دهیم وچند ضلعی دریك طرف آن ضلع قرارگیرد چند ضلعی را محدب‌گویند (شکل ۴ـ۱).



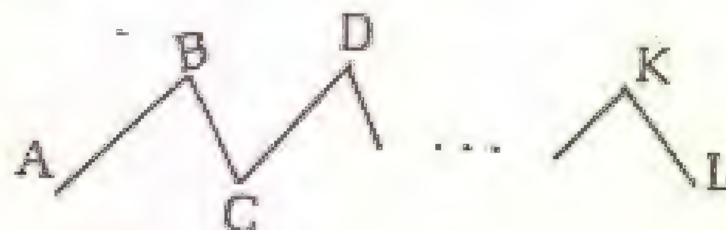
شکل (۴-۱)

اگر در یك چند ضلعی، ضلعی وجود داشته باشد که اگرآنرا از دو طرف امتداد دهیم و چند ضلعی در دو طرف آن ضلع قرارگیرد آن چند ضلعی را مقعرگویند (شکل ۴ـ۲).

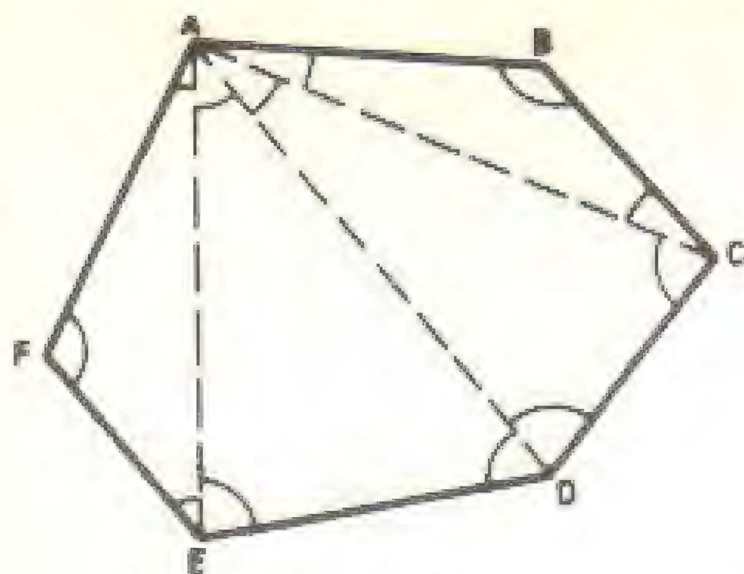


شکل (۴-۲)

۱ـ یك مجموعه متناهی از پاره‌خطهای AB و BC و CD و ... و KL یك خط‌شکسته نامیده میشود وآنرا خط شکسته ABCD ... KL می‌نامند اگر A و L برهم منطبق باشند خط شکسته را بسته می‌نامند.



(۱-۲) - مجموع زاویه‌های یك چند ضلعی

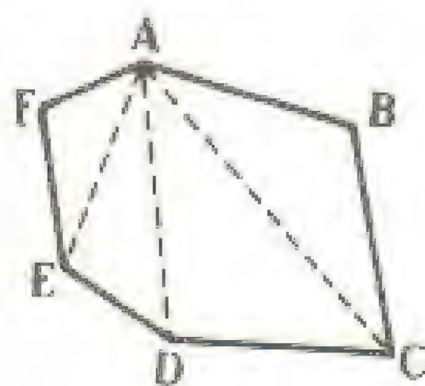


شکل (۴-۳)

قضیه - مجموع زاویه‌های هر n ضلعی محدب برابر با (۲n - ۴) قائمه است.

برهان - در n ضلعی ABC . . . F رأس A را به همه رأسهای غیر مجاور وصل می کنیم، به سادگی می توان دید که n - ۲ مثلث بدست می‌آید و مجموع زاویه‌های n ضلعی برابر با مجموع زاویه‌های این مثلثها است. اما میدانیم مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث ۲ قائمه است پس مجموع زاویه‌های n ضلعی برابر با (۲n - ۴) قائمه است (شکل ۴-۳)

(۱ - ۳) - **قطر چند ضلعی** - هر پاره‌خط که دوسر آن دو رأس غیر مجاور یك چند ضلعی باشند، قطر چند ضلعی است مانند قطرهای AC و AD و AE درچند ضلعی ABCDEF در شکل (۴-۴)، که همهٔ آنها از رأس A می گذرند. نشان می‌دهیم که تعداد قطرهای هر n ضلعی محدب برابر با $\frac{۱}{۲}$ n(n-۳) است. زیرا از هر رأس n ضلعی n-۳ قطر رسم می شود (چرا؟) وچون n رأس وجود دارد پس تعداد تمام قطرهای رسم شده از n رأس (n - ۳) n می‌باشد اما در این محاسبه هر رأس دوبار بشمار آمده است. پس تعداد قطرهای هر n ضلعی محدب برابر $\frac{۱}{۲}$ n(n-۳) است.



شکل (۴-۴)

تمرین

۱- مجموع اندازه‌های زاویه‌های یك دوازده ضلعی محدب را تعیین کنید.

۲- اندازه‌های سه زاویه از یك چهارضلعی به ترتیب °۱۳۰ و °۵۰ و °۷۵ است، اندازهٔ زاویهٔ چهارم آنرا تعیین کنید. این چهار ضلعی محدب است یا مقعر؟

۳- تعداد اضلاع چند ضلعی محدب را تعیین کنید که مجموع زاویه‌های آن °۲۵۲۰ است.

۴- تعداد اضلاع چند ضلعی محدب را که مجموع اندازه‌های زاویه‌های آن سه برابر مجموع اندازه‌های زاویه‌های یك شش ضلعی محدب است تعیین کنید.

۵- کدام یك از گزاره‌های زیر درست و کدام یك نادرست است؟

- هر ده‌ضلعی محدب ۳۵ قطر دارد. - هر هشت‌ضلعی ۲۵ قطر دارد. - در هر چندضلعی محدب

همهٔ زاویه‌ها کوچکتر از ۱۸۰ درجه‌اند.

۶- از هر رأس یک ۵ ضلعی چند قطر می‌گذرد؟ در ۶ ضلعی و ۸ ضلعی چند قطر؟

۷- هر ۵ضلعی چند قطر دارد؟ تعداد قطرهای ۶ضلعی و ۸ضلعی را محاسبه کنید.

۸- در کدام چند ضلعی تعداد قطرها مساوی تعداد اضلاع است؟

۹- در کدام چندضلعی تعداد قطرها چهار برابر تعداد اضلاع است؟

۱۰- هریک ازعبارات زیر را چنان کامل کنید که یک گزارهٔ درست باشد.

- هر دو رأس ... از یک چندضلعی دو سر یک قطر آن هستند. - بر هر رأس از یک ۱۲ ضلعی ... قطر مرور می کند.

۲- چهار ضلعیهای محدب

(۲-۱) - انواع چهار ضلعی - پس از مثلث ، چهار ضلعی ساده‌ترین نوع چند- ضلعیهاست. برخی از چهار ضلعیها به سبب روابطی که بین اجزای آنها وجود دارد، اهمیت بیشتری دارند. در این فصل انواع و خواص آنها را بررسی می کنیم.

(۲-۲) - متوازی‌الاضلاع

تعریف - متوازی‌الاضلاع چهار ضلعی است که اضلاع آن دو به دو موازی یکدیگرند.

مانند متوازی‌الاضلاع ABCD در شکل (۴-۵) که درآن $AB \parallel CD$ و $BC \parallel AD$ است.



شکل (۴-۵)

متوازی‌الاضلاع علاوه بر خواص عمومی چهارضلعیها دارای خواصی است که با قضایای زیر بیان می‌شوند:

قضیهٔ ۱ - در هر متوازی‌الاضلاع ، اضلاع مقابل مساوی یکدیگرند.

قضیهٔ ۲ - درهر متوازی‌الاضلاع زاویه‌های مقابل متساویند وزاویه‌های مجاورمکمل یکدیگرند.

قضیهٔ ۳ - در هر متوازی‌الاضلاع قطرها یکدیگر را نصف می کنند.

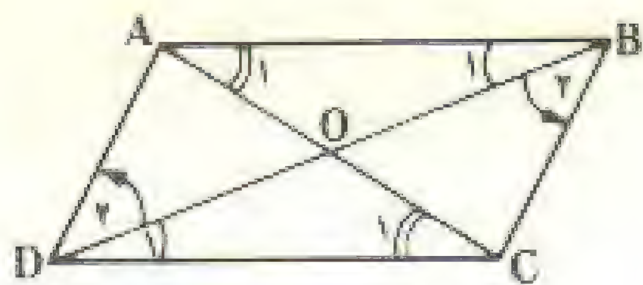
برهان - ۱ - در متوازی‌الاضلاع ABCD (شکل ۴-۶) :

$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel CD \Longrightarrow \angle B_1 = \angle D_1 \\ BC \parallel AD \Longrightarrow \angle B_2 = \angle D_2 \\ BD = BD \end{array}\right\} \Longrightarrow \triangle ABD = \triangle CDB$$

در نتیجه : $AB = CD$ و $AD = BC$

۲- زاویه‌های مجاور از متوازی‌الاضلاع نسبت به دو ضلع رو به رو ومورب حادث از

ضلع دیگر ، زاویه‌های متقابل داخلیند، پس به علت توازی اضلاع



شکل (۴-۶)

$$\left.\begin{array}{l}\angle B+\angle C=۱۸۰^\circ \\ \angle D+\angle C=۱۸۰^\circ\end{array}\right\} \Longrightarrow \angle B=\angle D$$

و به همین دلیل $\angle A=\angle C$

۳- $AB \parallel CD \Longrightarrow (\angle B_۱=\angle D_۱$ و $\angle A_۱=\angle C_۱)$

بنابراین :

$$\left.\begin{array}{c}\angle B_۱=\angle D_۱ \\ AB=CD \\ \angle A_۱=\angle C_۱\end{array}\right\} \Longrightarrow \triangle AOB=\triangle COD$$

در نتیجه : $BO=OD$ و $AO=OC$

قضایای عکس ـ قضیه ۱ ـ اگر در یک چهار ضلعی اضلاع مقابل دو به‌دو متساوی باشند چهار ضلعی متوازی‌الاضلاع است .

قضیه ۲ ـ اگر در یک چهارضلعی زاویه‌های مقابل دو به دومتساوی باشند ، چهار ضلعی متوازی‌الاضلاع است .

قضیه ۳ ـ اگر دریک چهارضلعی هردوزاویه مجاور به یک ضلع مکمل یکدیگر باشند چهار ـ ضلعی متوازی‌الاضلاع است.

قضیه ۴ ـ اگردر یک چهارضلعی قطرها منصف یکدیگر باشندچهارضلعی متوازی‌الاضلاع است .

هر قضیه را به صورت نمادهای ریاضی بنویسید واثبات کنید.

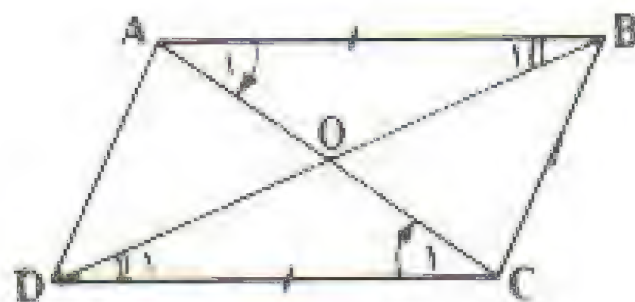
قضیه ۵ ـ اگر در یک چهار ضلعی دو ضلع مقابل متوازی و متساوی باشند چهار ضلعی متوازی‌الاضلاع است .

برهان ـ در چهار ضلعی ABCD (شکل ۴-۷) :

$$AB \parallel CD \Longrightarrow (\angle B_۱=\angle D_۱ \text{ و } \angle A_۱=\angle C_۱)$$

از اینجا نتیجه می‌شود :

$$\left.\begin{array}{c}\angle B_۱=\angle D_۱ \\ AB=CD \\ \angle A_۱=\angle C_۱\end{array}\right\} \Longrightarrow \triangle AOB=\triangle DOC$$



شکل (۴-۷)

بنابراین :

$$AO=OC$$
$$BO=OD$$

دنباله برهان را بعهده دانش‌آموزان می گذاریم.

تمرین

۱- عبارات زیر را چنان کامل کنید که هر یك گزاره‌ای درست شود :

- در هر متوازی‌الاضلاع مجموع دو زاویه‌ای که یك ضلع مشترك دارند .... - متوازی‌الاضلاع چهار ضلعی است که اضلاع مقابل آن .... - در هر متوازی‌الاضلاع دوضلع مقابل.... و .... یکدیگرند . - در هر متوازی‌الاضلاع هر قطر دیگری را ....

۲- ثابت کنید اگر قطرها و زاویهٔ بین دو قطر از متوازی‌الاضلاعی با قطرها و زاویهٔ‌بین دوقطر از متوازی‌الاضلاع دیگری برابر باشند، آن دو متوازی‌الاضلاع برابرند.

۳- ثابت کنید نیمسازهای زاویه‌های هرمتوازی‌الاضلاع از تلاقی با یکدیگر متوازی‌الاضلاعی تشکیل می‌دهند که زاویه‌های آن قائمه‌اند.

۴- ثابت کنید هر پاره‌خط که بر محل تلاقی دو قطر متوازی‌الاضلاع بگذرد و به دو ضلع مقابل آن محدود باشد، در نقطهٔ تلاقی دو قطر به دو جزء مساوی تقسیم می‌شود.

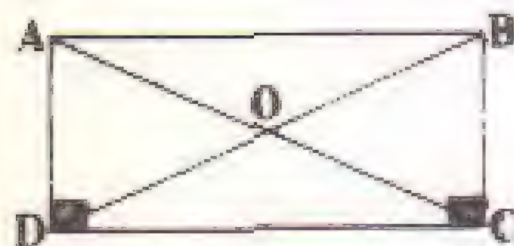
۵- متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که قطرهای آن ۸و۶ و یك ضلع آن ۵سانتیمتر باشد.

۶- خط d و نقطهٔ O واقع در خارج آن را در نظر گرفته با استفاده از خواص متوازی‌الاضلاع از نقطهٔ O خطی موازی d رسم کنید .

(۲-۳) - مستطیل

تعریف - مستطیل چهار ضلعی است که زاویه‌های آن قائمه‌اند. می‌دانید که اگر زاویه‌های چهار ضلعی قائمه باشند، اضلاع آن دو به دو موازی یکدیگرند (چرا؟) . پس مستطیل نوعی متوازی‌الاضلاع است که زاویه‌هایش قائمه‌اند. و می‌دانید که اگر یك زاویه از متوازی‌الاضلاعی قائمه باشد، سه زاویهٔ دیگر آن نیز قائمه‌اند. پس می‌توان گفت: مستطیل متوازی‌الاضلاعی است که یك زاویهٔ قائمه داشته باشد (شکل ۴-۸) .

مستطیل همهٔ خواص یك متوازی‌الاضلاع را دارد، ضمناً دارای خاصیت مهمی است که با قضیهٔ زیر بیان می‌شود :



شکل (۴-۸)

قضیه - در هر مستطیل قطرها مساوی یکدیگرند .

برهان - اگر چهار ضلعی ABCD مستطیل باشد (شکل ۴-۸) :

$$\left.\begin{array}{l}\angle C=\angle D=90^\circ\\ BC=AD\\ CD=DC\end{array}\right\} \Longrightarrow \triangle ADC=\triangle BCD$$

بنابراین : AC = BD .

قضیهٔ عکس - متوازی‌الاضلاعی که قطرهای آن متساوی باشند مستطیل است .
(اثبات به عهدهٔ دانش‌آموزان است .)

(۴-۲) - لوزی

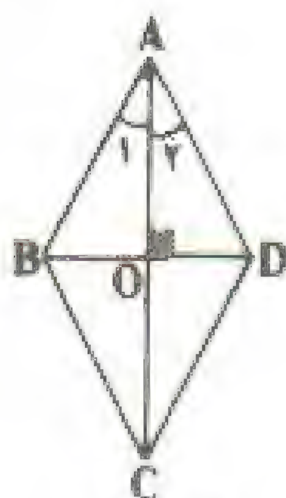
تعریف - لوزی چهار ضلعی است که چهار ضلع آن مساوی یکدیگرند. می‌توان ثابت کرد که اضلاع لوزی دو به دو متوازیند (ثابت کنید) . بنابراین لوزی نوعی متوازی‌الاضلاع است و متوازی‌الاضلاعی است که دو ضلع مجاور آن مساوی یکدیگر باشند .

لوزی همهٔ خواص متوازی‌الاضلاع را دارد و علاوه بر آنها دارای خواص دیگری است که با قضایای زیر بیان می‌شوند :

قضیه - در لوزی قطرها بر هم عمودند و زاویه‌ها را نصف می‌کنند

برهان - می‌دانیم که در متوازی‌الاضلاع قطرها منصف یکدیگرند. بنابراین در لوزی ABCD (شکل ۴-۹) ، $DO=OB$ ، یعنی پاره‌خط AO میانهٔ نظیر قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین DAB است. بنابراین همین خط بر قاعده عمود و نیمساز زاویهٔ A ازمثلث است . یعنی :

$$(ABCD\ :\ AB=BC=CD=DA) \Longrightarrow (AC\perp BD\ ,\ \angle A_1=\angle A_2)$$



شکل (۴-۹)

قضایای عکس - ۱- متوازی‌الاضلاعی که قطرهایش برهم عمود باشند لوزی است .

۲- متوازی‌الاضلاعی که قطرهایش نیمساز زاویه‌ها باشند لوزی است .

(قضیه‌ها را با نمادهای ریاضی بنویسید و ثابت کنید .)

(۵-۲) - مربع

تعریف - مربع چهار ضلعی است که زاویه‌هایش قائمه و چهار ضلع آن مساوی یکدیگرند (شکل ۴-۱۰) . با توجه به آنچه ذکر شد از قائمه بودن زاویه‌ها می‌توان نتیجه گرفت که مربع نوع خاصی مستطیل و نوع خاص متوازی‌الاضلاع است و از تساوی چهار ضلع نیز نتیجه می‌گیریم که مربع نوعی لوزی است . بنابراین مربع همهٔ خواص متوازی‌الاضلاع و مستطیل و لوزی‌را دارد و با توجه به قضایای عکس می‌توان گفت :



شکل (۴-۱۰)

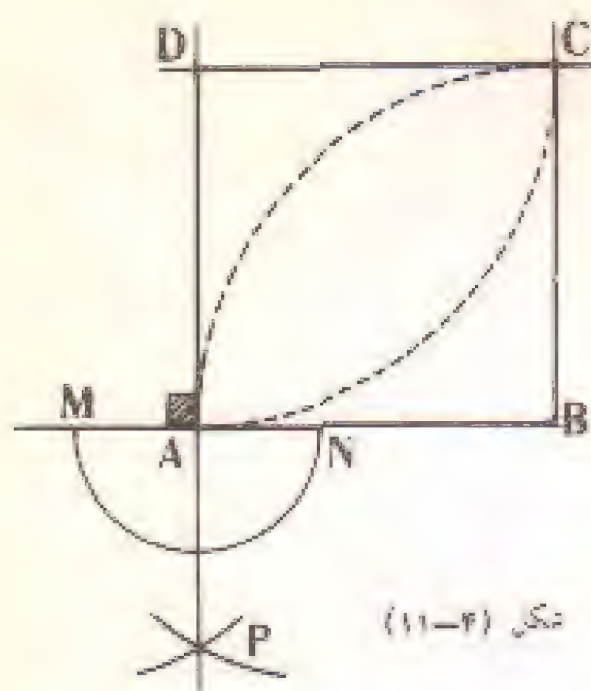
۱- مستطیلی که قطرهای آن عمود بر یکدیگر باشند

مربع است .

۲ـ مستطیلی که قطرهای آن زاویه‌هایش را نصف کنند مربع است .

۳ـ لوزیی که زاویه‌های آن متساوی باشند مربع است .

۴ـ لوزیی که قطرهای آن متساوی باشند ، مربع است .



شکل (۴ـ۱۱)

مسئله ـ می‌خواهیم مربعی به ضلع ۳ سانتیمتر رسم کنیم .

حل ـ با توجه به شکل (۴ ـ ۱۱) روش ترسیم مربع را بیان کنید و آن را با پرگار و خط‌کش روی کاغذ رسم کنید .

تمرین

۱ـ ثابت کنید از برخورد نیمسازهای زاویه‌های هر مستطیل یك مربع پدید می‌آید .

۲ـ از برخورد نیمسازهای زاویه‌های یك لوزی چه شکلی حاصل می‌شود ؟

۳ـ هرگاه بر امتداد چهار ضلع یك مربع در جهت معین چهار پاره‌خط مساوی جدا کنیم و انتهای پاره‌خطها را به هم وصل کنیم ثابت کنید، یك مربع پدید می‌آید.

۴ـ ثابت کنید در هر مثلث قائم‌الزاویه میانهٔ نظیر وتر نصف وتر است .

۵ـ ثابت کنید اگر در مثلثی میانهٔ نظیر یك ضلع مساوی نصف آن ضلع باشد ، مثلث در رأس نظیر آن ضلع قائم‌الزاویه است .

۶ـ ثابت کنید اگر در مثلث قائم‌الزاویه‌ای یك زاویه مساوی °۳۰ باشد ، ضلع مقابل به آن زاویه نصف وتر است .

۷ـ ثابت کنید اگر در مثلث قائم‌الزاویه‌ای یکی از اضلاع زاویهٔ قائمه نصف وتر باشد، اندازهٔ زاویهٔ مقابل به آن ضلع °۳۰ است.

۸ـ ثابت کنید اگر یك زاویهٔ مثلث قائم‌الزاویه °۱۵ باشد ، ارتفاع وارد بر وتر ربع وتر است .

۹ـ لوزیی رسم کنید که هر ضلع آن ۴ سانتیمتر و یکی از قطرهایش ۳ سانتیمتر باشد .

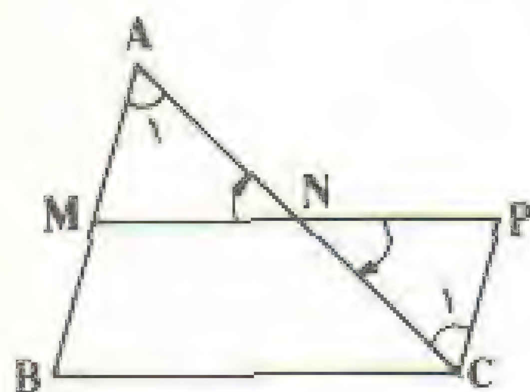
۱۰ـ مستطیلی رسم کنید که قطر آن ۴ سانتیمتر و یك ضلعش ۳ سانتیمتر باشد .

۱۱ـ مربعی رسم کنید که قطر آن ۴ سانتیمتر باشد.

(۲-۶) - خواص دیگری از مثلث - در این قسمت از آنچه در بارهٔ چهارضلعیها ثابت شد برای اثبات خاصیتهای دیگری از مثلث ، به شرح زیر استفاده می کنیم :

قضیه - پاره‌خطی که وسطهای دو ضلع از مثلثی را به هم وصل می‌کند موازی ضلع سوم مثلث و مساوی نصف آن ضلع است . یعنی در شکل (۴-۱۲) :

$$(\triangle ABC \;:\; MA=MB\,,\, NA=NC) \Longrightarrow (MN \parallel BC\,,\, MN=\tfrac{1}{2}BC)$$



شکل(۴-۱۲)

برهان - اگر پاره‌خط MN را از نقطهٔ N به‌اندازهٔ خود تا نقطهٔ P امتداد داده و نقطهٔ P را به C وصل کنیم ، دو مثلث ANM و PNC به حالت (ض‌زض) متساویند (چرا؟). و از تساوی آنها نتیجه می‌شود:

$$\angle A_1 = \angle C_1 \Longrightarrow PC \parallel AB$$

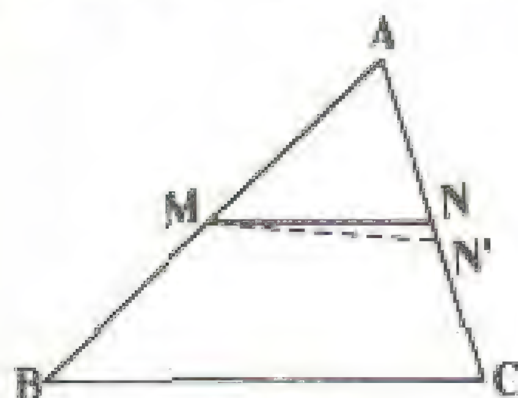
$$(PC \parallel AB\,,\, PC=MB) \Longrightarrow (MP \parallel BC\,,\, MP=BC)$$

$$MN=\tfrac{1}{2}MP \Longrightarrow MN=\tfrac{1}{2}BC$$

بنابراین $MN \parallel BC$ و $MN=\frac{1}{2}BC$.

قضیهٔ عکس - خطی‌که از وسط یك ضلع مثلث موازی ضلع دیگر رسم می‌شود از وسط ضلع سوم می‌گذرد و جزئی از آن که در داخل مثلث می افتد نصف آن ضلعی است که با آن موازی است ، یعنی در شکل (۴-۱۳) :

$$(\triangle ABC : AM=MB\,,\, MN \parallel BC) \Longrightarrow$$
$$(AN=NC\,,\, MN=\tfrac{1}{2}BC)$$



شکل(۴-۱۳)

برهان - اگر نقطهٔ N وسط AC نباشد ، نقطهٔ M را به N' وسط AC وصل می کنیم ، به موجب قضیهٔ قبل $MN' \parallel BC$ ؛ ازطرفی $MN \parallel BC$ است؛ پس بنا به اصل توازی MN' بر MN و در نتیجه نقطهٔ N' بر N منطبق است، یعنی نقطه N وسط AC است و در این صورت بنا به قضیهٔ قبل $MN=\frac{1}{2}BC$.

تمرین

۱- ثابت کنید اگر وسطهای اضلاع یك چهارضلعی را به ترتیب به هم وصل کنیم ، یك متوازی‌الاضلاع پدید می‌آید . مسئله را در مورد لوزی ، مستطیل ، مربع حل کنید .

۲- ثابت کنید وسطهای هر دو ضلع مقابل از یك چهار ضلعی و وسطهای دو قطر آن چهار

رأس یك متوازی‌الاضلاعند .

۳ـ ثابت کنید پاره خطهایی که وسطهـای اضلاع مقابل یك چهار ضلعی را به هم وصل می کنند از وسط پاره خطی که وسطهای دو قطر چهار ضلعی را به هم وصل می کند می‌گذرند .

۴ ـ ثابت کنید اگر یکی از ساقهای مثلث متساوی‌الساقینی را به اندازهٔ خودش از طرف رأس امتداد داده و انتهای پاره خـط حاصل را به رأس مقابل آن ساق وصل کنیم، یك مثلث قائم الزاویه پدید می‌آید .

۵ ـ نقاط H و D بترتیب پای ارتفاع و میانهٔ نظیر رأس A از مثلث ABC و نقاط E و F وسطهای دو ضلع AC و AB هستند . ثابت کنید دو مثلث EDH و FDH مساوی یکدیگرند و در آن دومثلث مجموع دوضلع که برضلع BC منطبق نیستند نصف مجموع‌اضلاع AB و AC است .

۶ ـ نقطه‌های M و N و P وسطهای سه ضلع مثلثی داده شده‌اند ، مثلث را رسم کنید .

(۲-۷) ـ ذوزنقه

تعریف ـ ذوزنقه چهارضلعی است که فقط دوضلع آن موازی یکدیگرند . مانندشکل (۴-۱۴) که درآن AB || CD



شکل (۴-۱۴)

در ذوزنقه هر یك از دو ضلع متوازی را یك قاعده و هر یك از دو ضلع ناموازی را یك ساق می گوییم .

در ذوزنقه دو زاویه مجاور به هر ساق مکمل یکدیگرند (چرا؟) .

ذوزنقه انواع گوناگون داردکه هر یك از آنها بـر حسب وضع ساقها نسبت بـه دو قاعده یا وضع خود دو ساق مشخص می‌شود .

ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ـ ذوزنقهٔ‌متساوی الساقین آن است که دو ساق آن متساوی باشند (شکل ۴-۱۵) .



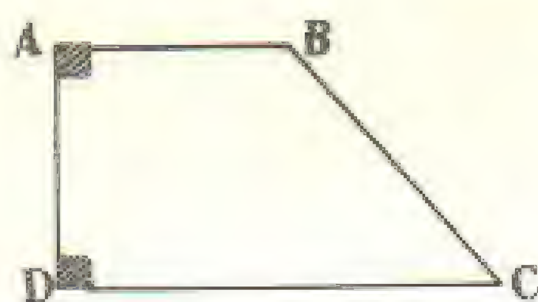
شکل (۴-۱۵)

قضیه ـ در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین :

۱ـ دو زاویهٔ مجاور به هر قاعده متساویند .

۲ـ دو قطر متساویند .

(اثبات به‌عهدهٔ دانش‌آموزان است.) برای‌اثبات قسمت‌اول‌از نقطهٔB خطی‌موازیAD



شکل (۴ـ۱۶)

رسم کنید تا قاعدهٔ CD را در E قطع کند. برای اثبات قسمت دوم ثابت کنید $\triangle ADC = \triangle BCD$.

قضیهٔ عکس ـ هر ذوزنقه که دو زاویهٔ مجاور به یك قاعدهٔ آن، یا دو قطر آن، متساوی باشند متساوی‌الساقین است.

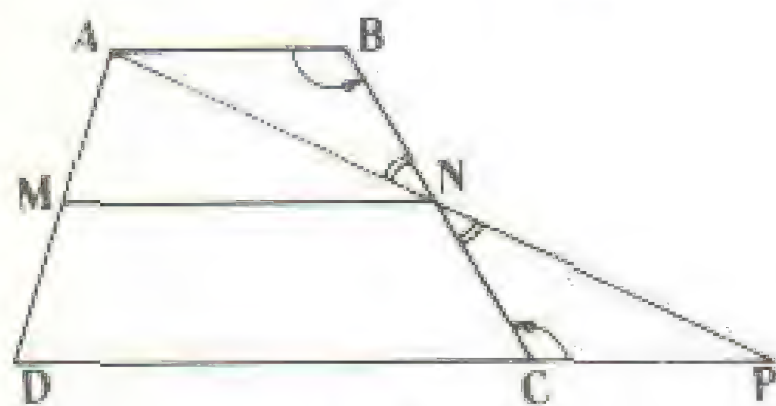
اثبات به عهدهٔ دانش‌آموزان است. راهنمائی: (از دوسر قاعدهٔ کوچك دو عمود بر قاعدهٔ بزرگ رسم کنید).

ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه ـ ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه آن است که یکی از ساقهای آن بر دو قاعده عمود باشد مانند ذوزنقهٔ $ABCD$ در شکل (۴ـ۱۶) که در آن CD و AB بر AD عمودند.

مهمترین خواص ذوزنقه به شرح زیر می‌باشند:

قضیه ـ پاره‌خطی که وسطهای دو ساق ذوزنقه را به هم وصل کند موازی دو قاعده و مساوی نصف مجموع آنهاست، یعنی در شکل (۴ـ۱۷):

$$\left.\begin{array}{r} ABCD\ :\ AB \parallel CD \\ AM = MD \\ BN = NC \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} MN \parallel AB \text{ و } MN \parallel CD \\ MN = \frac{1}{2}(AB + CD) \end{array}\right.$$



شکل (۴ـ۱۷)

برهان ـ اگر نقاط A و N را به هم وصل کرده و خط حاصل را امتداد دهیم تا قاعدهٔ CD را در نقطه‌ای مانند P قطع کند (آیا حتماً CD را قطع می‌کند؟ چرا؟)، مثلثهای ABN و PCN به حالت (زض ز) مساوی یکدیگرند (چرا؟).

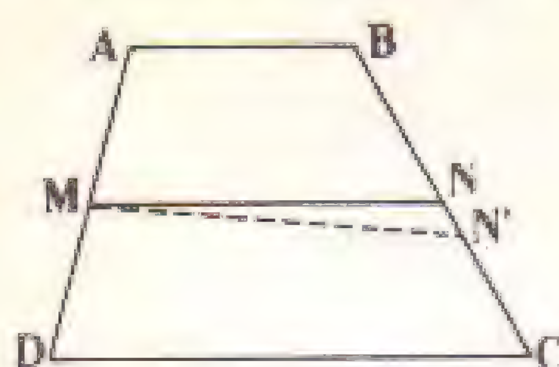
از تساوی این دو مثلث می‌توان نتیجه گرفت که: $AN = NP$ و $PC = AB$. بنابراین MN پاره‌خطی است که وسطهای دو ضلع AD و AP از مثلث ADP را به هم وصل می‌کند، پس موازی ضلع سوم مثلث و مساوی نصف آن است. یعنی $MN \parallel DC$ و $MN = \frac{1}{2} DP$، بنابراین:

$$MN = \frac{1}{2}(DC + CP) = \frac{1}{2}(DC + AB)$$

قضیهٔ عکس ـ خطی که از وسط یك ساق ذوزنقه موازی دو قاعده رسم می‌شود از وسط ساق دیگر می‌گذرد و جزئی از آن که در داخل ذوزنقه می‌افتد نصف مجموع دو قاعده است.

(قضیه را با نمادهای ریاضی بنویسید.)

برهان ـ اگر در شکل (۴ ـ ۱۸)، $AB \parallel CD$ و M وسط AD و $MN \parallel CD$ باشد نقطهٔ N وسط BC است. زیرا اگر N وسط BC نباشد، نقطهٔ M را به N' وسط BC وصل می‌کنیم، به موجب قضیهٔ قبل باید $MN' \parallel DC$ باشد، از طرفی $MN \parallel DC$ پس MN و MN' باید بر هم منطبق باشند (چرا؟) و دراین‌صورت نقطهٔ N' بر N منطبق خواهد بود یعنی همان نقطهٔ N وسط BC است. درنتیجه به‌موجب قضیهٔ قبل:



شکل (۴ـ۱۸)

$$MN = \frac{1}{2}(AB + CD)$$

تمرین

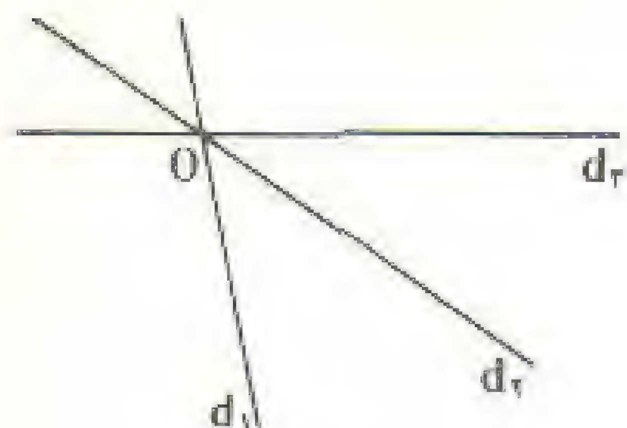
۱ ـ ثابت کنید یک ذوزنقه، متساوی‌الساقین است اگر و تنها اگر زاویه‌های مقابل مکمل باشند.

۲ ـ ثابت کنید دو قطر ذوزنقه بر خطی که از وسط یک ساق موازی دو قاعده رسم شود پاره‌خطی جدا می‌کنند که اندازهٔ آن مساوی نصف تفاضل دو قاعده است.

۳ـ ذوزنقه‌ای رسم کنید که اندازهٔ قاعدهٔ بزرگ آن ۵ سانتیمتر و هر یک از دو ساق آن ۴ سانتیمتر و هر زاویهٔ مجاور قاعدهٔ بزرگ آن °۶۰ باشد.

۳ـ خطهای همرس (متقارب) در مثلث

(۳-۱) ـ مجموعهٔ خطهای همرس ـ هرگاه سه خط یا بیشتر بریك نقطه بگذرند، خطهای همرس نامیده می‌شوند. برهر نقطهٔ O از **یك صفحهٔ P خطهای بی‌شمار می‌گذرند که آنها** را مجموعهٔ خطهای همرس در نقطهٔ O می‌گوییم. مجموعهٔ خطهای همرس در هر نقطه از یك صفحه زیر مجموعه‌ای از مجموعهٔ خطهای آن صفحه‌است (شکل ۴-۱۹).



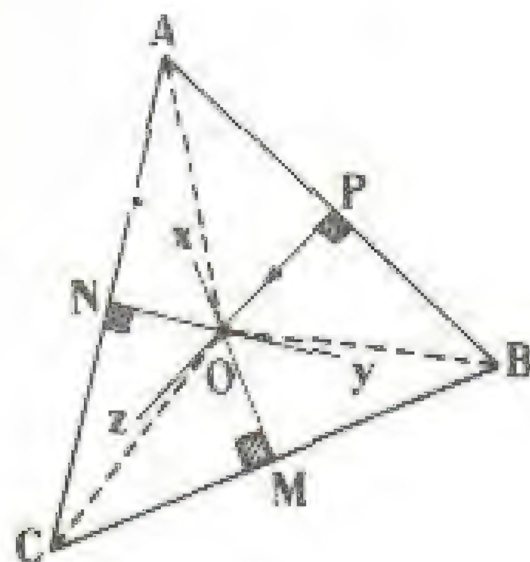
شکل (۴-۱۹)

باید توجه داشت که خطهای همرس ممکن است که عضوهای یك صفحه نباشند. اما در این کتاب وقتی به طور مطلق خطهای همرس می‌گوییم مقصود مجموعهٔ خطهایی است که در یك صفحه واقع باشند و از یك نقطه بگذرند.

(۳-۲)ـ خطهای همرس مثلث ـ چنان‌که می‌دانیم، هرمثلث دارای سه ارتفاع، سه‌میانه، سه‌نیمساز زاویهٔ داخلی، سه‌نیمساز زاویهٔ خارجی، سه‌عمود منصف‌اضلاع است. در این قسمت ثابت می‌کنیم که هر یك‌از این گروه‌ها یك مجموعهٔ خطهای همرس هستند. ازاین روی آنها را خطهای همرس مثلث می‌گوییم.

قضیه ۱ـ سه عمود منصف اضلاع هرمثلث همرسند.

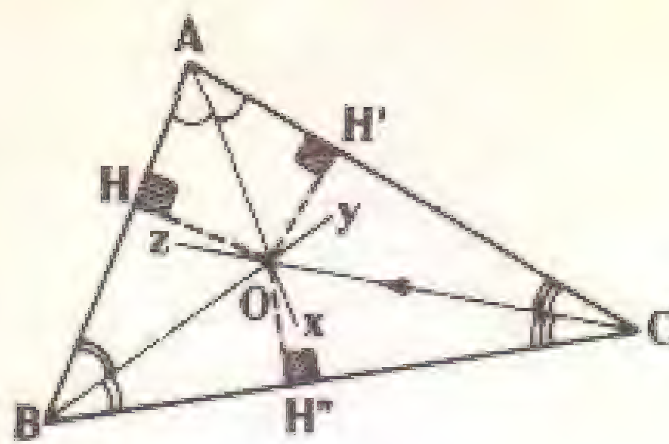
برهان ـ در مثلث ABC نیم خطهای Mx و Ny عمود منصفهای دو ضلع BC و AC در نقطه‌ای مانند O تلاقی می‌کنند (شکل ۴-۲۰) (چرا؟). ثابت می‌کنیم که Pz عمود منصف ضلع AB هم از نقطهٔ O می‌گذرد. برای اثبات این قسمت می‌توان نوشت:



شکل (۴-۲۰)

$$\left.\begin{array}{l} O\in Mx \Longrightarrow OB=OC \\ O\in Ny \Longrightarrow OA=OC \end{array}\right\} \Longrightarrow OB=OA \Longrightarrow O\in Pz$$

قضیه ۲ــ سه نیمساز زاویه‌های داخلی هرمثلث همرسند.

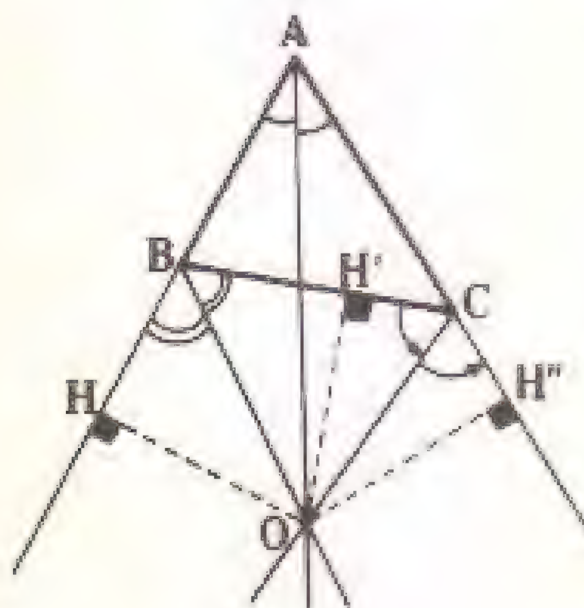


شکل (۴ــ۲۱)

برهان ــ Ax و By نیمسازهای دو زاویهٔ A و B از مثلث ABC در نقطه‌ای مانند O یکدیگر را قطع می‌کنند (شکل ۴ــ۲۱) (چرا؟). اگر از این نقطه عمودهای OH و OH' و OH" را بر اضلاع مثلث فرود آوریم:

$$\left.\begin{array}{l} O\in Ax \Longrightarrow OH=OH' \\ O\in By \Longrightarrow OH=OH'' \end{array}\right\} \Longrightarrow OH'=OH'' \Longrightarrow O\in Cz$$

یعنی Cz نیمساز زاویهٔ C مثلث نیز از نقطهٔ O می‌گذرد و سه‌نیمساز زاویه‌های داخلی مثلث همرسند.



شکل (۴ــ۲۲)

قضیه ۳ــ نیمسازهای هر دو زاویهٔ‌خارجی‌مثلث با نیمساز زاویهٔ داخلی سوم، همرسند.

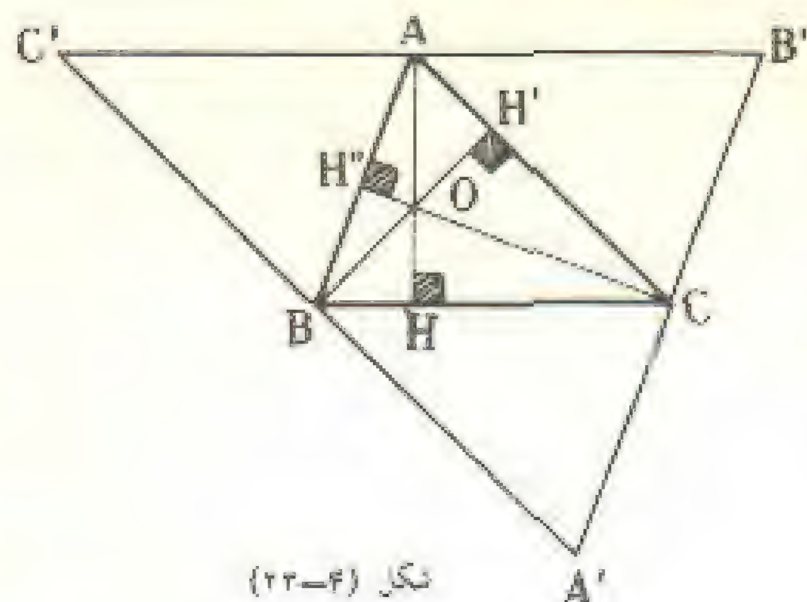
با استفاده از شکل (۴ــ۲۲) قضیه را ثابت کنید.

تمرین

۱ــ کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام یک نادرست است؟

ــ سه خط را درصورتی‌همرس می گوییم که یکدیگر را قطع کنند. ــ عمود منصفهای‌اضلاع یك مثلث از تلاقی با یکدیگر یك مثلث تشکیل می‌دهند. ــ نیمسازهای زاویه‌های هر مثلث از یك نقطه می گذرند. ــ نیمسازهای زاویه‌های خارجی هر مثلث‌همرسند. ــ هر نیمساز زاویهٔ خارجی مثلث نیمساز زاویهٔ داخلی غیرمجاور آن رادر خارج مثلث قطع می کند.

۲ــ سه مثلث رسم کنید که در یکی از آنها هر سه زاویه حاده و در هر یك از مثلثهای دیگر یك زاویهٔ قائمه یا منفرجه وجود داشته باشد. عمود منصفهای اضلاع هر یك از سه مثلث را دقیقاً رسم کنید و موقعیت محل همرسی عمود منصفها را درهر مثلث تعیین کنید.



شکل (۴–۲۳)

قضیهٔ ۴ـ سه ارتفاع هر مثلث همرسند.

برهان ـ برای اثبات این قضیه ثابت می‌کنیم که ارتفاعهای هر مثلث، عمودـ منصفهای اضلاع مثلث دیگری هستند و بنا بر این باید همرس باشند. برای این منظور از سه رأس مثلث ABC سه خط موازی با اضلاع مقابل رسم می‌کنیم. این خطها دو به دو یکدیگر را قطع می‌کنند (چرا؟)، و از تقاطع آنها مثلث $A'B'C'$ پدید می‌آید (شکل۴ـ۲۳). چهارضلعی $AB'CB$ متوازی‌الاضلاع است، پس $AB'=BC$ به دلیل مشابه $AC'=BC$ و درنتیجه $AB'=AC'$ از طرفی داریم: $(AH\perp BC$ و $BC\|B'C') \Longrightarrow AH\perp B'C'$، پس AH عمودمنصف ضلع $B'C'$ از مثلث $A'B'C'$ است. به دلایل مشابه ثابت می‌شود که BH' عمودمنصف $A'C'$ و CH'' عمود منصف $A'B'$ است. می‌دانیم که سه عمودمنصف اضلاع هر مثلث همرسند، بنابراین ارتفاعهای مثلث ABC همرسند.

قضیهٔ ۵ ـ سه میانهٔ هر مثلث همرسند و فاصلهٔ نقطهٔ همرسی آنها از وسط هر ضلع ثلث اندازهٔ میانهٔ نظیر آن ضلع است.

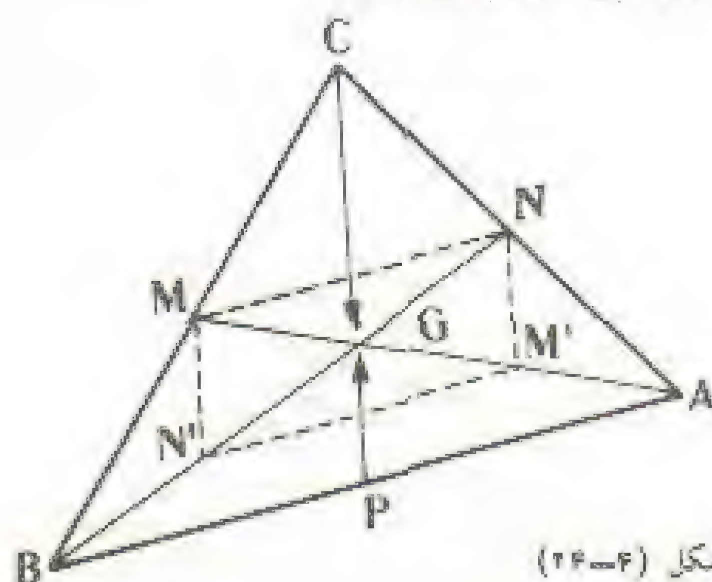
برهان ـ AM و BN میانه‌های نظیر دو رأس A و B از مثلث ABC در نقطه‌ای مانند G تلاقی می‌کنند(شکل ۴ـ۲۴) (چرا؟). اگرنقاط M' و N' با ترتیب وسطهای پاره خطهای AG و BG باشند، در مثلث ABC:

$$(AN=NC \text{ و } BM=MC) \Longrightarrow (MN\|AB \text{ و } MN=\tfrac{1}{2}AB)$$

و در مثلث AGB:

$$(AM'=M'G \text{ و } BN'=N'G) \Longrightarrow (M'N'\|AB \text{ و } M'N'=\tfrac{1}{2}AB)$$

بنابراین: $MN=M'N'$ و $MN\|M'N'$



شکل (۴–۲۴)

یعنی چهار ضلعی $MNM'N'$ متوازی‌الاضلاع است و بنابراین قطرهای آن‌یکدیگررا نصف می‌کنند. پس $GN'=GN$ و $GM'=GM$ و در نتیجه

$$BN'=N'G=GN$$

و

$$AM'=M'G=GM$$

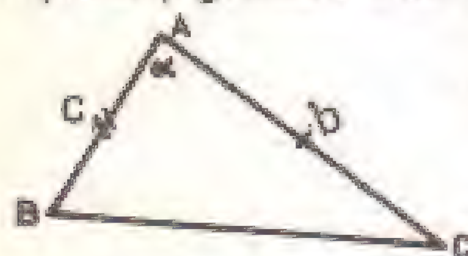
یعنی دومیانهٔ AM و BN در نقطه‌ای تلاقی می‌کنند که از وسط هر ضلع در فاصله‌ای مساوی ثلث اندازهٔ میانهٔ وارد بر آن ضلع واقع است. چون میانهٔ نظیر ضلع سوم نیز به همین دلیل با هر یک از دو میانهٔ مزبور در نقطه‌ای به فاصلهٔ ثلث اندازهٔ هر میانه از وسط ضلع نظیر تلاقی می‌کند، ناچار آن میانه نیز از نقطهٔ G می‌گذرد و حکم ثابت است.

نقطهٔ همرسی میانه‌های مثلث از نظر فیزیکی اهمیت دارد، زیرا اگر مثلث از یک ورقهٔ نازک متجانس ساخته شده باشد، این نقطه مرکز ثقل آن است.

(۳-۳) - بعضی از ترسیم‌های سادهٔ هندسی - یکی از بخش‌های مهم هندسه رسم اشکال هندسی با معلومات داده شده است. در این قسمت به ترسیم مثلث در حالات ساده اکتفا می‌کنیم.

مسأله ۱ - از مثلث ABC طول دو ضلع و زاویه بین آن دو ضلع معلوم است، آن را رسم کنید.

حل - فرض کنیم مسأله حل شده است و مثلث ABC جواب مسأله باشد شکل (۴-۲۵).



بنابرفرض مسأله اندازهٔ $AB=c$ و $AC=b$ و $\angle A=\alpha$ معلوم است.

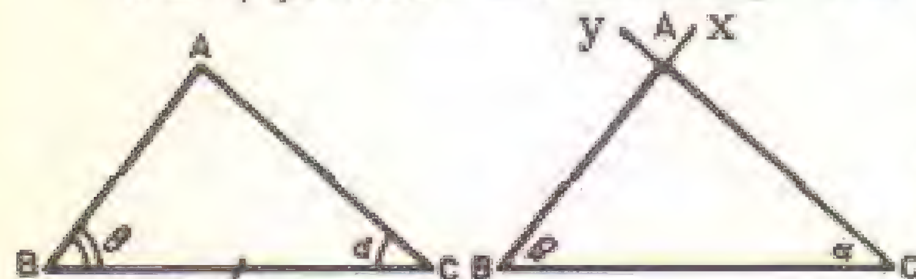
حال برای رسم مثلث، اول زاویه xAy را باندازهٔ α رسم می‌کنیم سپس روی Ax طولی باندازهٔ $AB=c$ و روی Ay طولی باندازهٔ $AC=b$ جدا می‌کنیم، نقاط B و C را بهم وصل می‌کنیم، مثلث ABC جواب مسأله است.



شکل (۴-۲۵)

مسأله ۲ - در مثلث ABC اندازهٔ دو زاویه و ضلع بین آنها معلوم است، آنرا رسم کنید.

حل - مانند مسأله ۱ فرض می‌کنیم مسأله حل شده است و مثلث ABC جواب مسأله باشد شکل (۴-۲۶).



شکل (۴-۲۶)

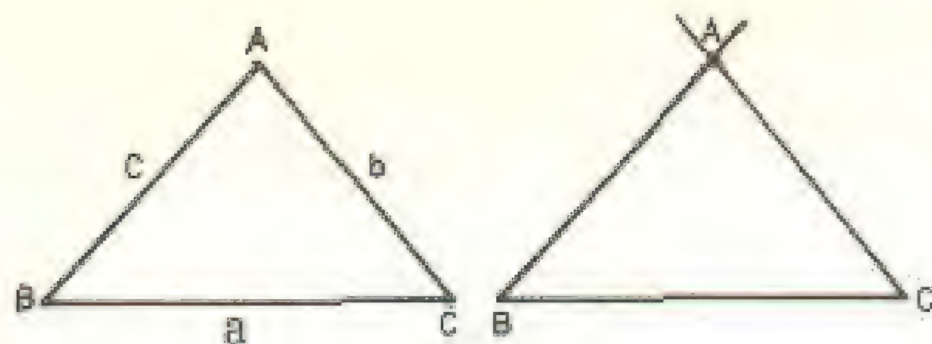
بنابرفرض $BC=a$ و $\angle B=\beta$ و $\angle C=\alpha$.

حال برای رسم مثلث قطعهٔ خط $BC=a$ را رسم می‌کنیم، سپس از نقطهٔ B خط Bx را چنان رسم می‌کنیم که با BC زاویهٔ β و از نقطهٔ C در همان طرف، خط Cy را چنان رسم می‌کنیم که با CB زاویهٔ α درست کند، محل تلاقی این دو خط نقطهٔ A می‌باشد.

مسأله ۳ - از مثلث ABC اندازهٔ سه ضلع معلوم است، آنرا رسم کنید.

حل - فرض کنیم مسأله حل شده است و مثلث ABC جواب مسأله باشد شکل (۴-۲۷).

بنا بر فرض مسأله، اندازه‌های $BC=a$ و $AB=c$ و $AC=b$ معلوم‌اند، برای رسم مثلث ضلع BC را باندازهٔ a رسم می‌کنیم سپس بمرکز B و بشعاع C و همچنین بمرکز C و بشعاع b دایره‌هایی رسم می‌کنیم محل تلاقی دو دایره رأس A می‌باشد.



شکل (۴–۲۷)

تمرین

۱– سه مثلث که در یکی هر سه زاویه حاده و در دومی یک زاویه قائمه و در سومی یک زاویه منفرجه باشد رسم کنید وموقعیت نقطهٔ همرسی ارتفاعها را در انواع مثلثها بررسی کنید.

۲– بررسی قبل درمسأله ۱ را درمورد نقطهٔ همرسی میانه‌های مثلث انجام دهید.

۳– با استفاده از خاصیت میانه‌های مثلث پاره‌خطی را به سه پارهٔ مساوی تقسیم کنید.

۴– ثابت کنید مجموع سه میانهٔ هر مثلث از $\frac{3}{4}$ مجموع سه ضلع آن بزرگتر است.

۵– مثلثی رسم کنید که درآن دوضلع و میانهٔ نظیر ضلع سوم داده شده باشد.

۶– مثلثی رسم کنید که در آن اندازه‌های سه میانه داده شده باشد. (در حالت خاص اندازه‌های میانه‌ها را ۴ و ۶ و ۷/۵ سانتیمتر در نظر بگیرید.)

۷– ثابت کنید اگر در مثلثی دو میانه مساوی باشند، مثلث متساوی‌الساقین است.

۸– مثلثی را با داشتن اندازه‌های دو میانه و یک ضلع رسم کنید. برای مسئله چند حالت می‌توانید تشخیص بدهید.

۹– از مثلثی اندازه‌های یک ضلع و ارتفاع و میانهٔ وارد بر آن ضلع داده شده‌اند. مثلث را رسم کنید.

۱۰– مثلثی با معلومات زیر رسم کنید:

دو ضلع و میانهٔ وارد بر یکی ازآن اضلاع.

یک ضلع وارتفاع ومیانهٔ وارد برآن ضلع.

یک ضلع و ارتفاع‌های نظیر دو ضلع دیگر.

دو ضلع و ارتفاع وارد بر ضلع سوم.

دوضلع و زاویه مقابل به یکی ازآنها.

۱۱– مثلث متساوی‌الساقین با معلومات زیر رسم کنید:

محیط وارتفاع وارد بر قاعده.

ارتفاع وارد برقاعده وارتفاع وارد برساق .

۱۲ــ مثلث قائم‌الزاویه‌ای با معلومات زیر رسم کنید :

وتر و ارتفاع وارد بر وتر .

وتر و میانهٔ وارد بر یک ضلع .

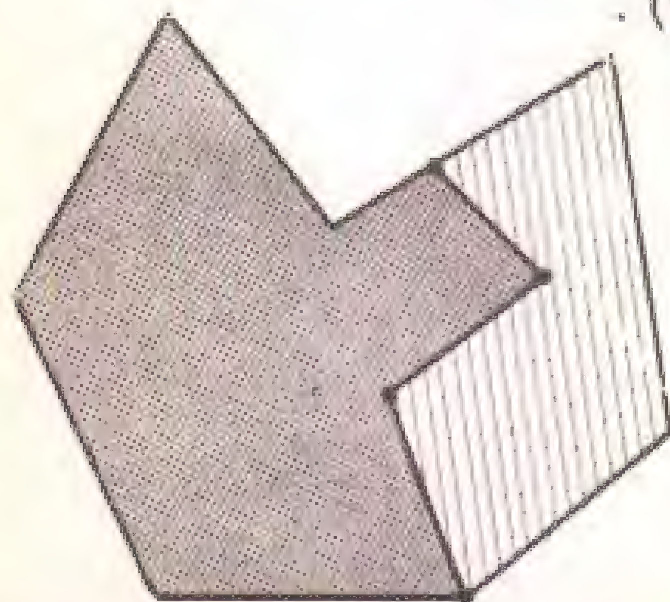
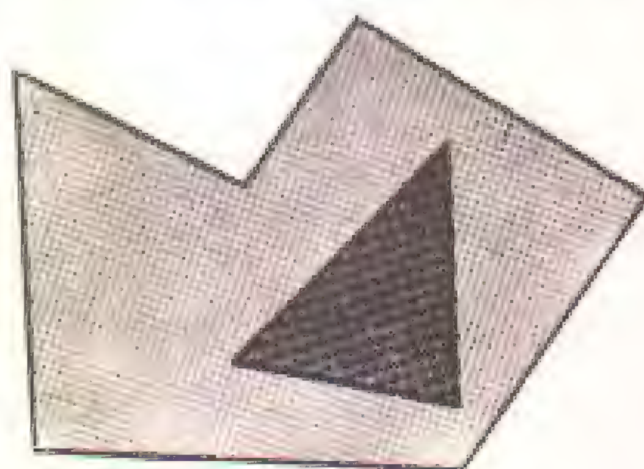
۴ـ اندازه‌گیری سطح

(۴ـ۱) ـ سطح و مساحت چند ضلعی ـ مجموعه نقطه‌هایی که در درون یا روی چند ضلعی هستند ، سطح چند ضلعی نامیده می‌شود . بعبارت دیگر سطح یک چند ضلعی آن قسمت از صفحه است که بـا محیط چند ضلعی مسدود شده است . در مورد پاره خطها دیدیم کـه همیشه می‌توان با رویهم نهادن دو پاره خط آنها را با هم مقایسه کرد ولی این موضوع برای سطحها عملی نیست ، مثلا نمی‌توان بـا رویهم نهـادن یک مستطیل بـا ضلعهای ۱۵ و ۲ سانتی متر و یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۸ سانتی متر دریافت کدامیک بزرگتر و کدامیک کوچکتر است . بهر حال راه دیگری برای مقایسه سطحهای دو چند ضلعی وجود دارد که اندازه‌گیری سطح نامیده می‌شود. برای این منظور یک واحد اندازه‌گیری درازا مانند متر یا سانتی متر یا غیره انتخاب می کنیم قبول می‌کنیم که به سطح هرچند ضلعی عددی مثبت نسبت داده مـی‌شود که آنرا مساحت آن چند ضلعی می‌نامیم و در شرطهای زیر صدق می کند :

(الف) ـ مساحت هر مستطیل برابر با حاصلضرب درازا و پهنای آن است. (درازا و پهنای مستطیلها را با واحد اندازه گیری درازا که انتخاب کردیم اندازه گیری می کنیم .)

(ب) ـ اگـر یک چند ضلعی جـا بجا شود ، مساحتش تغییر نمـی کند . بعبارت دیگـر مساحت‌های دوشکل مساوی با هم برابرند .

(ج) ـ اگرسطح یک چند ضلعی زیرمجموعه‌ای ازسطح یک چند ضلعی دیگر باشد ، مساحت اولی از مساحت دومی بزرگتر نیست (شکل ۴ـ۲۸) .

شکل(۴ـ۲۸)

(د) ـ هرگاه خط شکسته‌ای یك چند ضلعی را به دوچند ضلعی چنان بخش کند که سطحهای دو چند ضلعی بدست‌آمده فقط در آن خط شکسته مشترك باشند، آنگاه مساحت چند ضلعی اصلی برابر با مجموع مساحتهای دوچندضلعی جدید است (شکل۴-۲۸).

مربع به ضلع ۱ را واحد اندازه‌گیری مساحت می‌گویند و بنا به شرط (الف) مساحت آن برابر با ۱ است. چنانچه واحد اندازه‌گیری درازا متر یا سانتی‌متر یا غیره باشد، واحد اندازه‌گیری مساحت را بترتیب مترمربع یا سانتی‌متر مربع یا غیره می‌نامند.

(۴-۲) ـ اندازه محیط چند ضلعی ـ مجموع درازاهای ضلعهای یك‌چندضلعی‌را اندازه محیط و یا باختصار محیط آن چند ضلعی می‌نامیم. پس منظور ما از محیط گاهی اجتماع ضلعهای آنست و گاه مجموع اندازه‌های ضلعهای آن.

(۴-۳) ـ مساحت ومحیط مستطیل ـ بنا به شرطهای مساحت، مساحت هرمستطیل برابر با حاصلضرب درازا و پهنای آنست. پس اگر a و b بترتیب درازا و پهنای مستطیل و S مساحت‌آن باشد، $S=ab$، (شکل ۴-۲۹).



شکل (۴-۲۹)

بسادگی می‌توان دید که محیط هرمستطیل برابراست با دو برابر مجموع اندازه‌های درازا و پهنای آن، یعنی

$$\text{محیط مستطیل} = ۲(a+b)$$

که a و b درازا و پهنای مستطیل هستند. متداول است که نصف محیط را با p نمایش دهیم، پس

$$۲p=۲(a+b)$$

مساحت مربع به ضلع a برابر $a^۲$ ومحیط‌آن برابر $۴a$ است.

تمرین

۱ـ هر متر مربع چند دسیمتر مربع و چند سانتیمتر مربع است؟

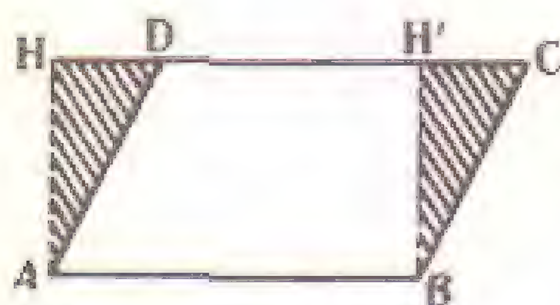
۲ـ اندازهٔ ضلع مربعی را تعیین کنید که مساحت آن ۱۲/۹۶ متر مربع باشد.

۳ـ اندازهٔ درازا و پهنای مستطیلی را تعیین کنید که مساحت آن ۱۹۲ مترمربع و درازای آن سه برابر پهنایش باشد.

۴ـ مساحت مربعی را که هر ضلع آن مساوی قاعدهٔ یك مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه است، بر حسب مساحت آن مثلث بیان کنید.

(۴-۴) ـ محیط و مساحت متوازی‌الاضلاع ـ به‌همان ترتیب که در مورد مستطیل ذکر شد ، محیط متوازی‌الاضلاع دو برابر مجموع اندازه‌های دو ضلع مجاور آن است.

برای تعیین مساحت متوازی‌الاضلاع قبلا باید یادآوری کنیم که در متوازی‌الاضلاع فاصلهٔ دو ضلع مقابل یا پاره‌خطی را که از یك رأس بر ضلع مقابل عمود است بـه عنوان ارتفاع در نظر می‌گیریم و ضلعی را که بر هر ارتفاع عمود است قاعده می‌گوییم . در این صورت اگر از دو رأس A و B (شکل ۴-۳۰) دو پاره خط AH و BH′ را بر ضلع CD عمود کنیم ، دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ADH و BCH′ مساوی یکدیگرو بنابراین به‌یك‌مساحتند . درنتیجه‌مساحت متوازی‌الاضلاع ABCD بـا مساحت مستطیل ABH′H یکی است . اما اضلاع مستطیل AB و AH هستند. پس اگر مساحت متوازی‌الاضلاع مفروض S باشد ، S = AB . AH ، یعنی :



شکل (۴-۳۰)

قضیه ـ مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است با حاصل ضرب اندازهٔ یك ضلع در فاصلهٔ آن ضلع از ضلع مقابل (حاصل ضرب قاعده در ارتفاع نظیر آن)

مثال ـ محیط و مساحت متوازی‌الاضلاعی که ضلعهای آن به ترتیب ۵ و ۸ سانتیمتر و فاصلهٔ دو ضلع ۸ سانتیمتری آن ۴ سانتیمتر باشد ، به ترتیب :

$$2p = ۲ (۸ + ۵) = ۲۶ \text{ سانتیمتر} \quad \text{و} \quad S = ۸ \times ۴ = ۳۲ \text{ سانتیمتر مربع}$$

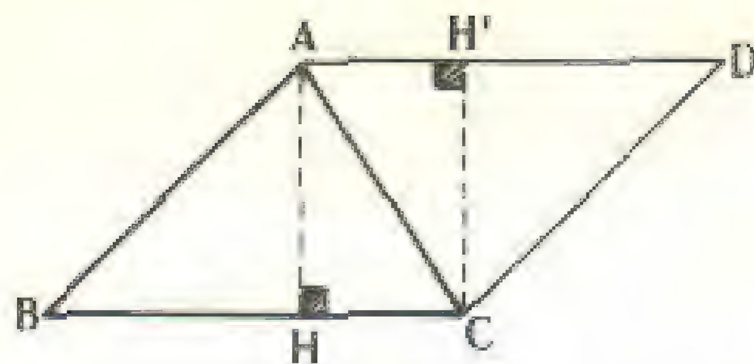
آیا می‌توانید اندازهٔ ارتفاع دیگر این متوازی‌الاضلاع را حساب کنید ؟ این متوازی‌الاضلاع را رسم کنید .

چند ضلعیهای هم ارز (معادل) ـ دوچند ضلعی را وقتی هم ارزمی‌گوئیم که مساحتهای آنها یکی باشند ، بدیهی است که دوشکل مساوی عموماً هم‌ارزندواما لازمهٔ هم ارزبودن دوشکل تساوی‌آنها نیست ، یعنی دو شکل ممکن است هم ارز باشند اما مساوی نباشند چنان که در شکل (۴-۳۰) مستطیل ABH′H با متوازی‌الاضلاع ABCD هم‌ارزاست اما مساوی‌آن نیست .

توجه داشته باشید که‌دو پاره خط هم اندازه مساوی هم هستند واما دو سطح هم‌ارز ممکن است مساوی نباشند.

(۴-۵) ـ محیط و مساحت مثلث ـ به موجب تعریف‌کلی ، محیط مثلث برابر است با مجموع اندازه‌های سه ضلع آن . بـدیهی است اگـر مثلث ، مثلاً ، متساوی‌الاضلاع باشد ، برای تعیین محیط آن کافی است اندازهٔ یك ضلع را در عدد ۳ ضرب کنیم .

مساحت مثلث ـ در مثلث ABC (شکل ۴ ــ ۳۱) از دو رأس A و C دو خط موازی با اضلاع BC و BA رسم می‌کنیم، این دو خط یکدیگر را در نقطه‌ای مانند D قطع می‌کنند (چرا؟)، و متوازی‌الاضلاع ABCD پدید می‌آید که در آن مثلثهای ABC و ACD متساوی و بنابراین هم‌ارز یکدیگرند. پس مساحت متوازی‌الاضلاع دوبرابر مساحت مثلث ABC است. اما مساحت این متوازی‌الاضلاع BC.AH است. بنابراین اگر مساحت مثلث را S بنامیم: $S=\frac{1}{2}BC.AH$ یعنی:



شکل (۴ــ۳۱)

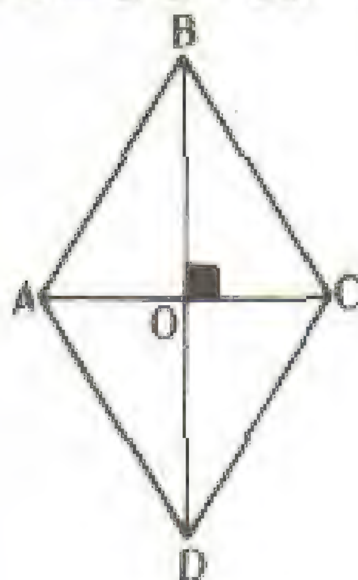
قضیه ـ مساحت مثلث برابر است با نصف حاصل‌ضرب اندازهٔ هر ضلع در اندازهٔ ارتفاع نظیر آن ضلع (مساحت هر مثلث برابر است با اندازهٔ قاعده ضرب در نصف اندازهٔ ارتفاع نظیر آن).

مثال ـ مساحت مثلثی که یك ضلع آن $\frac{25}{2}$ سانتیمتر و ارتفاع نظیر آن ضلع ۴ سانتیمتر باشد:

$$S=\frac{1}{2}\times\frac{25}{2}\times 4=\frac{50}{2}$$ سانتیمترمربع

(۴ــ۶) ـ محیط و مساحت لوزی ـ **محیط لوزی** مساوی ۴ برابر اندازهٔ یك ضلع آن است.

مساحت لوزی ـ چون قطرهای لوزی بر یکدیگر عمودند، اگر لوزی ABCD را مجموع دو مثلث ADB و BDC که BD قاعدهٔ مشترك آنها و AO و CO ارتفاعهای نظیر قاعده‌ها هستند در نظر بگیریم، با ملاحظهٔ آن‌که AO=CO است (شکل ۴ ــ ۳۲) مساحت هر یك از دو مثلث مزبور $s=\frac{1}{2}BD.AO=\frac{1}{2}BD.CO$ و در نتیجه مساحت لوزی دوبرابر آن یعنی $S=2s=\frac{1}{2}.BD.AC$ است. بنابراین:



شکل (۴ــ۳۲)

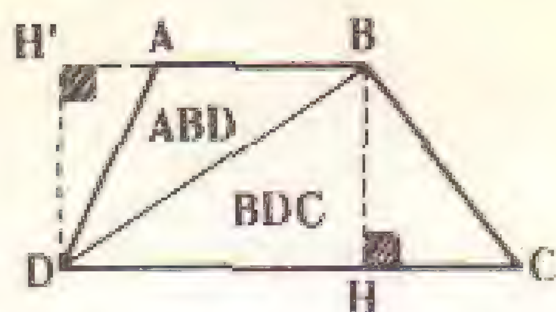
قضیه ـ مساحت لوزی برابر است با نصف حاصل‌ضرب دو قطر آن.

توجه ـ هر لوزی یك متوازی‌الاضلاع است پس از دستورهای متوازی‌الاضلاع هم می‌توان استفاده کرد.

(۴ــ۷) ـ محیط و مساحت ذوزنقه ـ **محیط ذوزنقه** مساوی مجموع اندازه‌های چهار ضلع آن است.

مساحت ذوزنقه ـ برای تعیین مساحت ذوزنقهٔ ABCD (شکل ۴ ــ ۳۳) قطر BD آن را رسم می‌کنیم؛ ذوزنقه به دو مثلث تقسیم می‌شود. اگر از دو رأس B و D ذوزنقه دو

عمود BH و 'DH را که بر قاعده‌های مقابل فرود می‌آیند رسم کنیم DH' = BH (چرا؟) . و اما این دو پاره‌خط ارتفاعهای مثلثها هستند . پس اگر مساحت دو مثلث به ترتیب s_1 و s_2 و مساحت ذوزنقه S باشد :



شکل (۴–۳۳)

$$S = s_1 + s_2 = \frac{1}{2} DC.BH + \frac{1}{2} AB.DH'$$

یا $S = \frac{1}{2}(DC + AB) . BH$ است ، یعنی :

قضیه ـ مساحت ذوزنقه برابر است با نصف حاصل‌ضرب مجموع اندازه‌های دو قاعده در ارتفاع (مجموع دو قاعده ضرب در نصف ارتفاع)

مثال ـ محیط ذوزنقهٔ ABCD در شکل (۴–۳۴) :



شکل (۴–۳۴)

$2P = AB + BC + CD + DA = ۱۵ + ۳۳ + ۲۰ + ۸ = ۷۶$ میلیمتر

و مساحت آن :

$S = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot AH = \frac{1}{2}(۸ + ۳۳) \times ۱۲ = ۲۴۶$ میلیمتر مربع

تمرین

۱ـ محیط و مساحت متوازی‌الاضلاعی را تعیین کنید که دوضلع آن ۱۲ و ۶ سانتیمتر و یك زاویهٔ آن °۳۰ باشد . ارتفاع دیگر متوازی‌الاضلاع را تعیین کنید .

۲ـ دو قاعدهٔ ذوزنقه متساوی الساقینی ۴ و ۱۰ سانتیمتر و هرساق آن ۵ سانتیمتر وارتفاع آن ۴ سانتیمتر است . محیط و مساحت آن را تعیین کنید . مساحت هریك از دومثلثی را که به وسیلهٔ یك قطر از ذوزنقه بوجود می‌آید تعیین کنید .

۳ـ ثابت کنید اگر وسطهای اضلاع یك چهارضلعی را متوالیاً به هم وصل کنیم چهارضلعی دیگری حاصل می‌شود که مساحت آن نصف مساحت چهارضلعی مفروض است .

۴ـ ثابت کنید مساحت هر مثلث قائم‌الزاویه نصف حاصل ضرب دو ضلع زاویهٔ قائمه است .

۵ـ ثابت کنید اگر از چهار رأس یك چهارضلعی خطهایی موازی قطرها رسم کنیم ازتلاقی آنها یك چهارضلعی حاصل می‌شود که مساحت آن دو برابر مساحت چهار ضلعی اول است .

۶ـ ثابت کنید اگر یك قطر چهار ضلعی قطر دیگر را نصف کند ، همان قطر چهار ضلعی را به دو مثلث همسطح افراز می‌کند .

۷ـ خطی که وسط دو قاعدهٔ ذوزنقه را به هم وصل می‌کند آن را به دو چهارضلعی هم‌ارز تقسیم می‌کند .

۸ـ مکان هندسی رأسهای مثلثهای هم‌ارزی را که قاعدهٔ مشترك دارند تعیین کنید.

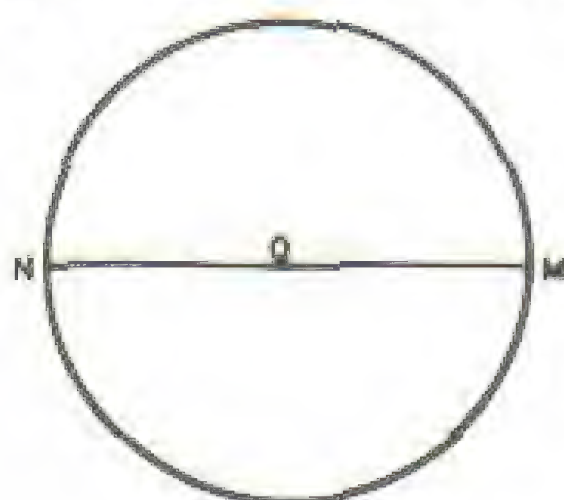
فصل پنجم

دایره

۱ــ کلیات

(۱ ــ ۱) ــ **تعریف** ــ مجموعهٔ همهٔ نقطه‌های یك صفحه را که فاصله‌شان از نقطهٔ ثابتی مانند O در آن صفحه برابر با عدد ثابت R است یك دایره به مرکز O و شعاع R می‌نامند. هرپاره خط مانند OM را که یك نقطه M از دایره را به مرکز آن O وصل می‌کند شعاع دایره می‌نامیم. چون از نقطه O بی‌شمار نیم خط متمایز آغاز می‌شود، پس هر دایره شعاع‌های بی شمار دارد ولی اندازهٔ همهٔ آنها برابر با عدد ثابتی است. هر نیم خط با مبدأ O تنها در یك نقطه با دایره برخورد می کند.

نمایش دایره را بر صفحه کاغذ بوسیله پرگار رسم می کنیم (شکل ۵ــ۱).



شکل (۵ــ۱)

هر دایره با مرکز و شعاعش مشخص می‌شود. دایرهٔ به مرکز O و شعاع R را با نماد $C(O, R)$ نمایش می‌دهیم و آن را «دایرهٔ C به مرکز O و به شعاع R» می‌خوانیم. پس:

$$C(O, R) = \{M | OM = R\}$$

یعنی: دایره مجموعهٔ همهٔ نقاطی از یك صفحه است که از یك نقطهٔ ثابت آن صفحه بیك فاصله‌اند. **دو دایره با شعاع‌های متساوی با هم برابرند.**

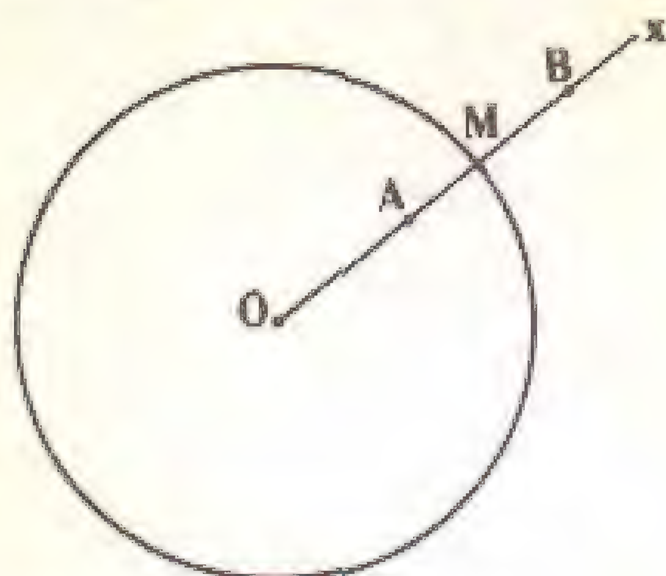
پاره‌خطی که بر مرکز دایره بگذرد و از دو طرف به دایره محدود شود، قطر دایره نامیده می‌شود. مانند قطر MN در شکل (۵ ــ ۱). واضح است که

$$MN = MO + ON = ۲R$$

یعنی: قطر دایره دو برابر شعاع آن است. در هر دایره قطرهای بی‌شمار می‌توان رسم کرد.

همهٔ قطرهای دایره در مرکز آن همرسند.

(۱ ـ ۲) ـ درون و برون دایره ـ نیم خط دلخواه Ox را بمبدأ O ، مرکز دایرهٔ $C(O, R)$ ، (شکل ۵ـ۲) ، درنظر می گیریم . نقطهٔ M را به فاصلهٔ $OM = R$ از نقطهٔ O بر این نیم خط اختیار می کنیم. این نقطه برخورد دایره و نیم خط مزبور است. برای هرنقطه مانند A از نیم‌خط Ox که بین O و M واقع باشد، $OA < R$ و برای هرنقطه مانند B از نیم‌خط مزبور که بر امتداد OM واقع باشد $OB > R$.



شکل (۵-۲)

بدین ترتیب بر هر نیم خط بـه مبدأ O از صفحه ، نقاطی نظیر A ، M و B می‌توان درنظر گرفت که فاصله‌های آنها از نقطهٔ O به ترتیب کوچکتر از شعاع دایره، مساوی با شعاع دایره ، یا بزرگتر از آن باشد. بنابراین دایرهٔ C مجموعهٔ نقاط صفحه را به سه زیر مجموعه به شرح‌زیر تقسیم می کند:

۱) ـ I ، مجموعهٔ نقاطی که فاصلهٔ آنها از مرکز کوچکتر از شعاع است :

$$I = \{A \mid OA < R\}$$

این زیر مجموعه از صفحه را کـه شامل مرکز دایره و به دایره محدود است درون دایره می گوییم .

۲) ـ C ، مجموعهٔ نقاط واقع بر دایره:

$$C = \{M \mid OM = R\}$$

۳) ـ E ، مجموعهٔ نقاطی که فاصلهٔ آنها از نقطهٔ O از شعاع دایره بزرگتر است:

$$E = \{B \mid OB > R\}$$

این زیر مجموعه ازصفحهٔ P را برون دایرهٔ C می گوییم.

مجموعه نقطه‌هایی که روی یا در درون یك دایره هستند، سطح آن دایره می‌نامند. سطح دایره را گرده نیز می‌نامند .

در سالهای آینده خواهیم دید که هرخط شکسته‌ای کـه یك نقطه در درون دایره را به یك نقطه در برون آن وصل کند، دست‌کم یك نقطه مشترك با دایره خواهد داشت. در این کتاب این گفته را بدیهی می‌پنداریم .

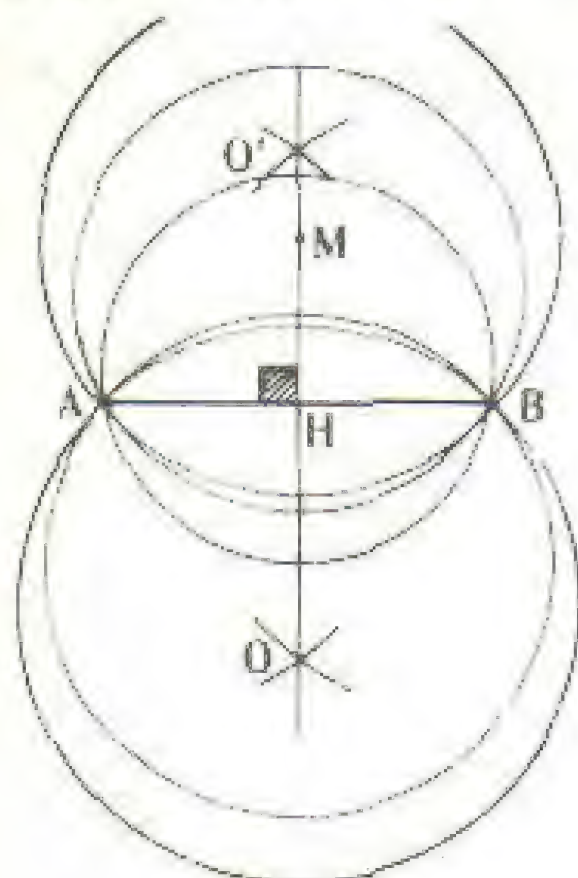
(۱ ـ ۳) ـ دایره یك مکان هندسی است ـ از تعریف دایره چنین برمی‌آید که :

دایره مـکان هندسی نقاطی از صفحه است که از یك نقطه ثابت آن صفحه به فاصله ثابتی

واقع باشند .

تمرین ـ نشان دهید که هر دایره فقط یک مرکز دارد .

(۱-۴)- نقاط مشترک خط و دایره ـ در صفحهٔ P پاره‌خط AB را در نظر می‌گیریم (شکل ۵ - ۳) . چنان که می‌دانید اگر نقطهٔ M بر عمود منصف این پاره‌خط واقع باشد ، دایرهٔ به مرکز M و شعاع MA از هر دو نقطهٔ A و B می‌گذرد (چرا؟) . بنابراین دایره‌های بی‌شمار می‌توان رسم کرد که همهٔ آنها بر دو نقطهٔ A و B بگذرند. مرکزهای همهٔ این دایره‌ها بر عمود منصف پاره‌خط AB واقعند. پس می‌توان گفت :



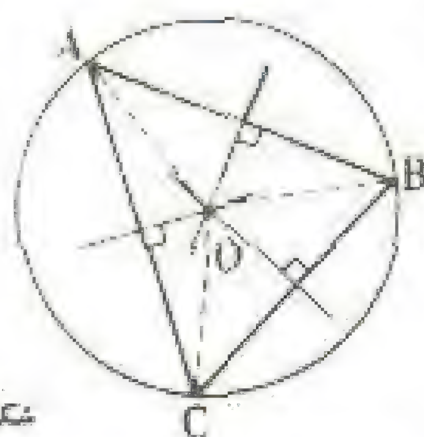
شکل (۵-۳)

قضیه ۱ ـ در هر صفحه بر دو نقطهٔ متمایز دایره‌های بی‌شمار می‌گذرند . عمود منصف پاره‌خط واصل بین آن دو نقطه مکان هندسی مرکزهای این دایره‌هاست .

حال سه نقطهٔ A ، B و C را که بر یک خط راست واقع نیستند در نظر می‌گیریم (شکل ۵ - ۴) ، عمود منصفهای اضلاع مثلث ABC در یک نقطه و فقط در یک نقطه مانند O متقارنند و $OA = OB = OC$ ، بنابراین دایرهٔ به مرکز O و به شعاع OA ، (یا OB یا OC) بر سه نقطهٔ A ، B و C می‌گذرد. نقطهٔ O تنها نقطه‌ای است که از نقاط A ، B و C به یک فاصله است (چرا؟) . پس دایرهٔ به مرکز O و به شعاع OA تنها دایره‌ای است که بر سه نقطهٔ مذکور می‌گذرد .

بنابراین :

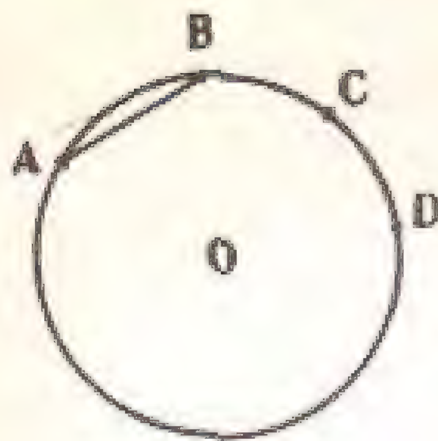
قضیه ۲ ـ بر سه نقطهٔ غیرواقع بر یک خط راست یک دایره ، و فقط **یک** دایره ، مرورمی‌کند.



شکل (۵-۴)

اگر سه نقطهٔ A ، B و C بر یک خط راست واقع باشند ، عمود منصفهای سه پاره‌خط AB ، BC و AC متوازی هستند و نقطه‌ای نمی‌توان داشت که از سه نقطهٔ مزبور به یک فاصله باشد ، یعنی در این حالت دایره‌ای نمی‌توان رسم کرد که آن سه نقطه را شامل باشد . بنابراین :

قضیه ۳ - خط راست نمی‌تواند با دایره بیش از دو نقطهٔ مشترک داشته باشد.



شکل (۵-۵)

(۱-۵) - وتر - پاره خطی که دو نقطهٔ متمایز از یك دایره را بهم وصل می‌کند، وتر نامیده می‌شود مانند وتر AB. قطردایره بزرگترین وتراست.

قوس (کمان) - درشکل (۵-۵) هروتر، دایره را بدوقسمت تقسیم می کند که هریك ازآنها را یك قوس می‌نامند، مانند قوس AB که آنرا با نماد $\widehat{AB}$ نشان می‌دهند.

(۱-۶) - قوسهای متساوی - فرض می کنیم که‌دوقوس AB و CD (شکل ۵-۵) با یکدیگر برابرباشند و بخواهیم آنها را برهم منطبق سازیم.

دایرهٔ O را چرخی فرض‌کنید که در حول محوری که‌برمرکزش گذشته و برصفحهٔ آن عمود باشد دوران کند؛ بسهولت درك می کنید که‌دایرهٔ محیط این چرخ پیوسته بر روی خودش تغییر مکان می‌دهد. حالافرض کنید که $\widehat{CD}$ راثابت‌نگاهداریم‌ودایره راآنقدردرحول مرکزش‌بچرخانیم که A بر C واقع شود؛ چون دو قوس متساویند، B هم بر D قرار می‌گیرد و دو قوس متساوی، بر یکدیگر منطبق می‌شوند.

اگر بخواهیم دو قوس متساوی از دو دایرهٔ متساوی را برهم منطبق‌کنیم، مراکز دوایررا منطبق می‌سازیم، بدیهی است‌دودایره‌برهم واقع می‌شوند؛ حال یکی از دوایر را درحول مرکز آنقدر می‌چرخانیم که قوسهای متساوی، مانند قوسهای AB و CD در (شکل ۵-۵)، بر هم منطبق‌شوند.

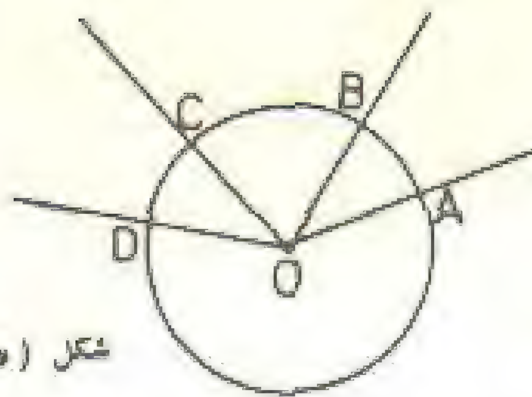
جمع و تفریق قوسها - جمع وتفریق قوسها، شبیه به‌جمع وتفریق پاره خطهاست. درشکل(۵-۵)، $\widehat{AC} = \widehat{AB} + \widehat{BC}$ و $\widehat{AB} = \widehat{AC} - \widehat{BC}$.

(۱-۷) - زاویهٔ مرکزی - هرزاویه‌که رأسش درمرکز دایره باشد زاویهٔ مرکزی‌نام دارد. قوسی از دایره‌که بین نقاط تقاطع دایره با اضلاع یك زاویهٔ مرکزی محصور است، قوس مقابل آن زاویهٔ مرکزی است، و آن زاویه هم زاویهٔ مرکزی مقابل به‌آن قوس نامیده می‌شود.

قضیه - هرگاه دردایره‌ای دوزاویهٔ مرکزی متساوی باشند، قوسهای مقابلشان‌نیز متساویند.

فرض: $\angle AOB = \angle COD$

حکم: $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ (شکل ۵-۶)



شکل (۵-۶)

برهان — یکی از دوزاویه را ثابت نگاه می‌داریم و دایره را در حول مرکزش آنقدر می‌چرخانیم تا یك ضلع زاویهٔ دیگر بریك ضلع زاویهٔ ثابت قرارگیرد و دوزاویه در یك طرف آن ضلع واقع شوند؛ بدیهی است که چون دوزاویه متساویند، اضلاع دیگرشان نیز برروی هم قرارمی‌گیرند؛ در نتیجه نقاط A و C بر هم و نقاط B و D نیز برهم واقع‌شده وکمانهای AB و CD برهم منطبق می‌شوند ؛ یعنی دو قوس ، متساویند .

قضیه عکس — هرگاه در دایره‌ای دو قوس متساوی باشند ، زاویه‌های مرکزی مقابلشان متساویند .

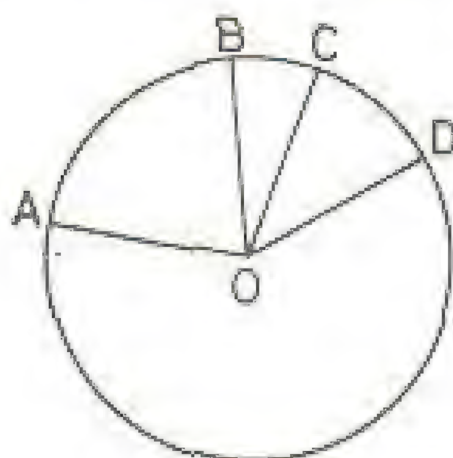
فرض: $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ (شکل ۵-۶)

حکم: $\angle AOB = \angle COD$

برهان — یك قوس را ثابت‌نگاه می‌داریم و دایره را آنقدر درحول مرکزش می‌چرخانیم تا قوس دیگر برقوس ثابت منطبق شود؛ در نتیجه دو زاویهٔ مرکزی بریکدیگر منطبق می‌شوند، یعنی متساویند .

نتیجه — هرقطر ، دایره را به‌دوقوس متساوی تقسیم میکند که هریك از آنها مقابل به‌یك زاویهٔ نیم صفحه است.

قضیه — هرگاه در دایره‌ای دو زاویهٔ مرکزی متساوی نباشند ، قوس مقابل به‌زاویه بزرگتر ، بزرگتراست ازقوس مقابل به‌زاویهٔ‌کوچکتر (شکل ۵-۷)



شکل (۵-۷)

فرض: $\angle AOB > \angle COD$

حکم: $\widehat{AB} > \widehat{CD}$

برهان — اگر دایره را آنقدر بچرخانیم که OC بر OA قرارگیرد ودو زاویه در یك طرف OA واقع شوند ، ضلع OD در درون زاویهٔ AOB می‌افتد و نقطهٔ D بین A و B واقع می‌شود ، یعنی :

$$\widehat{AB} > \widehat{CD}$$

قضیهٔ عکس — هرگاه دردایره‌ای دوقوس نامتساوی باشند ، قوس بزرگتر مقابل است به-

زاویهٔ مرکزی بزرگتر.

فرض : $\widehat{AB} > \widehat{CD}$ (شکل ۵-۷)

حکم : $\angle AOB > \angle COD$

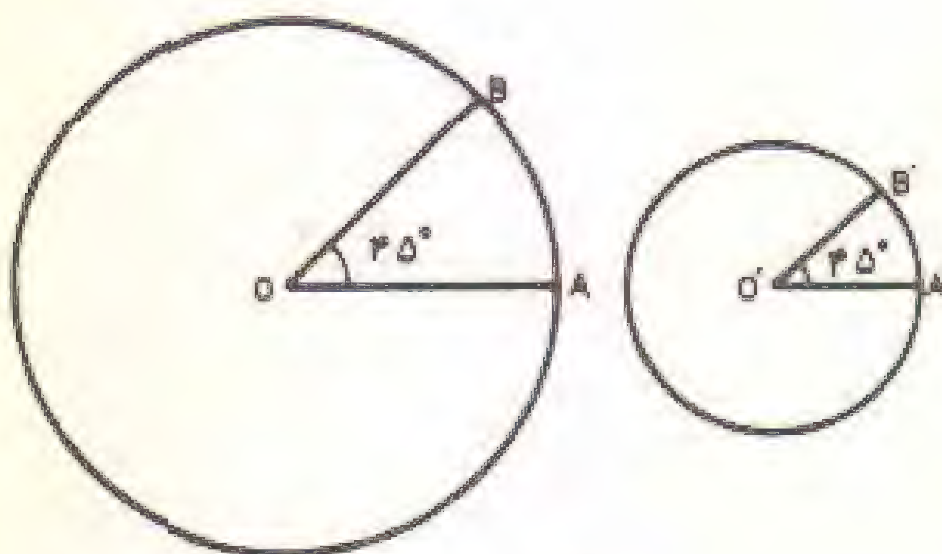
برهان - اگر $\angle AOB$ از $\angle COD$ بزرگتر نباشد، یا با آن مساوی است یا از آن کوچکتر است؛ هرگاه $\angle AOB = \angle COD$ باشد، $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ و این خلاف فرض است؛ و اگر $\angle AOB < \angle COD$ باشد، $\widehat{AB} < \widehat{CD}$ و این نیز خلاف فرض است؛ پس در نتیجه $\angle AOB > \angle COD$ است.

(۱-۸)- *اندازه کمان* - *از قضیه‌های اخیر نتیجه می‌شود که یک وابستگی میان هر کمان و* زاویه مرکزی آن وجود دارد، مثلا اگر یک زاویه مرکزی چند برابر شود، کمان آن هم چند برابر می‌شود و بعکس. همچنین بزرگی و کوچکی کمانهای یک دایره به بزرگی و کوچکی زاویه‌های مرکزی آنها بستگی دارد، بنابراین می‌توان از تعریف زیر برای مقایسه و اندازه‌گیری کمانهای یک دایره ثابت استفاده کرد.

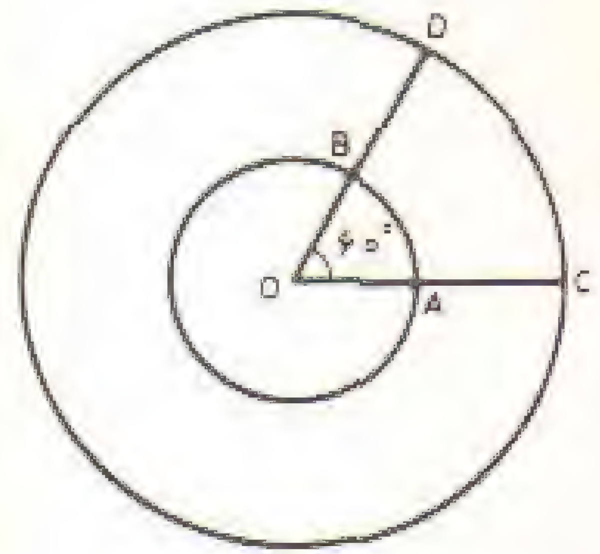
تعریف - هرگاه اندازه زاویه مرکزی یک کمان برابر با α واحد باشد، گوئیم اندازه کمان هم برابر با α واحد است.

بنابراین اگر زاویه مرکزی یک کمان ۶۰ درجه باشد، آن کمان هم ۶۰ درجه است.

در سالهای آینده درازای یک کمان را نیز تعریف خواهیم کرد که برحسب واحدهای درازا مانند متر، سانتی‌متر، اینچ یا غیره بیان می‌شود. یادآوری می‌کنیم که درازای یک کمان و اندازه آن دو چیز متفاوت هستند و از یک گونه نیستند. دو کمان از دو دایره با شعاعهای مختلف ممکن است یک اندازه داشته باشند ولی درازایشان متفاوت باشد. (به شکلهای ۵-۸ و ۵-۹ نگاه کنید.)



شکل (۵-۹)



شکل (۵-۸)

تمرین

۱ ـ کدام یك از گزاره‌های زیر درست و کدام یك نادرست است ؟

ـ همهٔ زاویه‌های مرکزی یك دایره متساویند . ـ رأس هر زاویهٔ مرکزی از یك دایره بر مرکز آن دایره واقع است . ـ هر دایره فقط شامل دو نیمدایره است . ـ هر نیمدایره یك کمان از دایره است . ـ هر دایره فقط یك قطر دارد . ـ هر دایره با هر وتر آن تنها در دو نقطه مشترك است .

۲ ـ عبارات زیر را چنان کامل کنید که هر یك گزاره‌ای درست باشد :

ـ کمانهای متساوی یك دایره زاویه‌های مرکزی ... دارند . ـ در دو دایرهٔ نامتساوی کمانهای .... زاویه‌های مرکزی متساوی دارند . ـ هر شعاع از یك دایره زیرمجموعه‌ای از نقاط .... است . ـ نیمساز هر زاویهٔ مرکزی از یك دایره کمان نظیر آن زاویه را ...

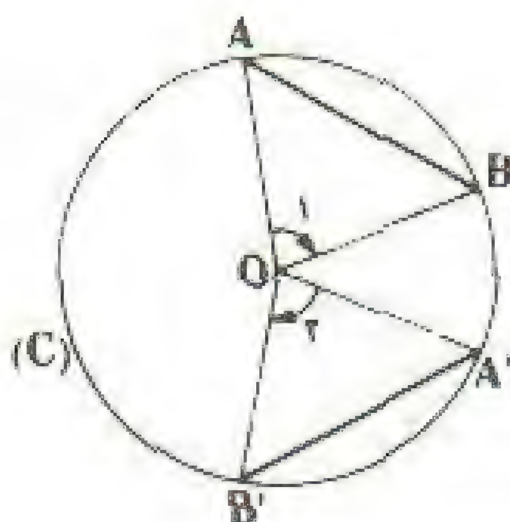
۳ ـ سه نقطه A و B و C بر یك دایره به مرکز O چنان اختیار شده‌اند که $\widehat{AOB}=۷۵°$ و $\widehat{BOC}=۱۳۶°$ و دو زاویه در دو طرف OB هستند . اندازه کمان AC را تعیین کنید .

۲ ـ گزاره‌هائی درباره وترها و کمانها

(۲-۱) ـ وترها و کمانهای برابر و نابرابر

قضیه ۱ ـ فرض کنیم AB و A'B' دو وتر از یك دایره هستند و $\widehat{AB}$ و $\widehat{A'B'}$ کمانهائی هستند که از ۱۸۰° بیشتر نیستند . آنگاه AB = A'B' اگر و تنها اگر $\widehat{AB}=\widehat{A'B'}$.

برهان ـ در دو مثلث AOB و A'OB' (شکل ۵-۱۰) :



شکل (۵-۱۰)

$$\left.\begin{array}{l}OA=OA'\\AB=A'B'\\OB=OB'\end{array}\right\}\Longrightarrow \triangle AOB=\triangle A'OB'$$

بنابراین $\angle O_1=\angle O_2$ و در نتیجه $\widehat{AB}=\widehat{A'B'}$ ؛

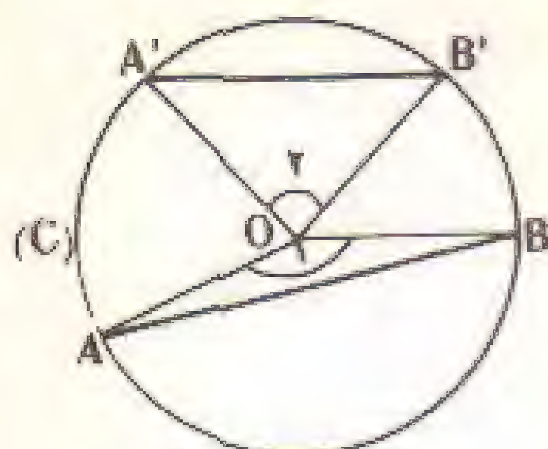
به ترتیب عکس می‌توان دید که

$$\widehat{AB}=\widehat{A'B'}\Longrightarrow \angle O_1=\angle O_2$$

و در این صورت دو مثلث AOB و A'OB' به حالت (ض ز ض) مساوی یکدیگر می‌شوند و در نتیجه AB = A'B' .

قضیه ۲ – فرض کنیم AB و $A'B'$ دو وتر از یک دایره‌اند و $\widehat{AB}$ و $\widehat{A'B'}$ از ۱۸۰° بیشتر نیستند، آنگاه AB از $A'B'$ بزرگتر است اگر و تنها اگر $\widehat{AB}$ از $\widehat{A'B'}$ بزرگتر باشد.

برهان – در شکل (۵–۱۱):



شکل (۵–۱۱)

$$\left.\begin{array}{r} OA = OA' \\ OB = OB' \\ AB > A'B' \end{array}\right\} \Longrightarrow \angle O_1 > \angle O_2$$

(چرا؟)

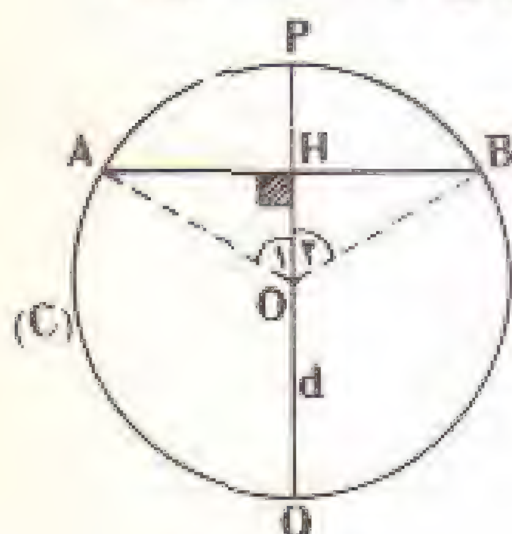
بنابراین $\widehat{AB} > \widehat{A'B'}$

عکس قضیه را با برهان خلف یا با روش مستقیم ثابت کنید.

(۲ – ۲) – فاصلهٔ وتر از مرکز دایره

قضیه ۱ – در هر دایره قطر عمود بر یک وتر، وتر و کمانهای آن را نصف می‌کند.

برهان – اگر در دایرهٔ $C(O, R)$ (شکل ۵–۱۲)، قطر PQ بر وتر AB عمود باشد، در مثلث AOB که متساوی‌الساقین است، پاره‌خط OH ارتفاع نظیر قاعده است و بنابراین زاویهٔ رأس و قاعدهٔ مثلث را نصف می‌کند، پس: $AH = HB$ و $\angle O_1 = \angle O_2$



شکل (۵–۱۲)

از تساوی این دو زاویهٔ مرکزی، تساوی کمانهای AP و PB نتیجه می‌شود. اما PQ قطر دایره است و بنابراین کمانهای PAQ و PBQ متساویند، در نتیجه: $\widehat{AQ} = \widehat{QB}$ (چرا؟).

قضایای عکس قضیه ۱

قضیه – خطی که مرکز دایره را به وسط یک وتر آن وصل کند بر آن وتر عمود است. (و بنابراین کمانهای نظیر آن وتر را نصف می‌کند.)

قضیه – قطری که از وسط یک کمان از دایره بگذرد بر وتر نظیر آن کمان عمود است، (و بنابراین وتر و کمان دیگر نظیر آن را نصف می‌کند.)

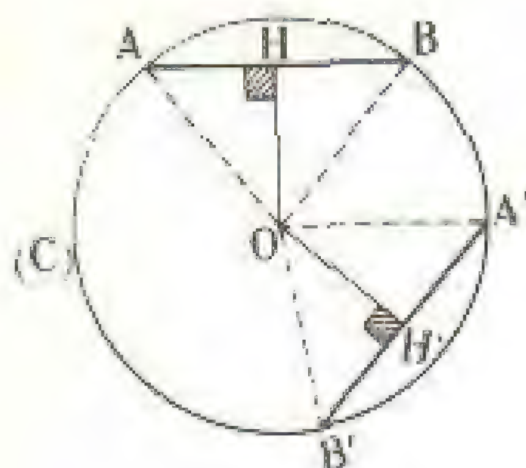
قضیه ۲ – کمانهایی که بین دو وتر متوازی از دایره‌ای محصور باشند مساوی یکدیگرند.

هر یک از سه قضیه را با نمادهای ریاضی بنویسید و ثابت کنید.

قضیه ۳ – در هر دایره وترهای متساوی از مرکز به یک فاصله‌اند.

یعنی در شکل (۵ - ۱۳) :

$$A, B, A', B' \in C(O, R) \;;\; \begin{bmatrix} AB = A'B' \\ OH \perp AB \\ OH' \perp A'B' \end{bmatrix} \Longrightarrow OH = OH'$$



شکل (۵ - ۱۳)

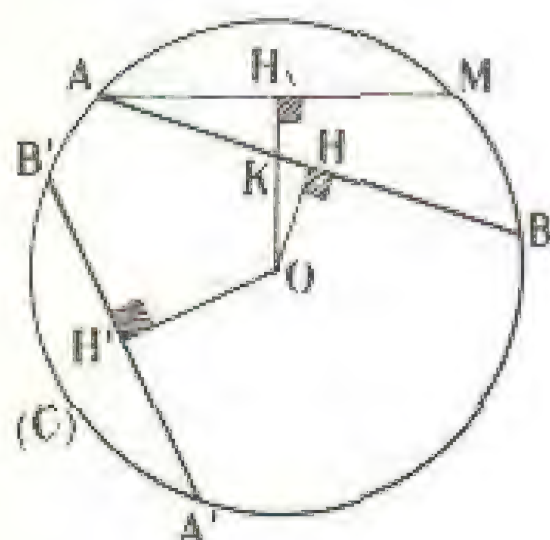
برهان ـ از تساوی دو وتر AB و A'B' تساوی دو مثلث AOB و A'OB' را به حالت (ض ض ض) نتیجه می‌گیریم. لازمهٔ تساوی این دو مثلث آن است که همهٔ اجزای نظیر آنها، و از جمله ارتفاعهای نظیر دو قاعده، متساوی باشند. پس $OH = OH'$.

قضیهٔ عکس ـ در هر دایره وترهایی که از مرکز به یک فاصله‌اند متساویند.

(اثبات به عهدهٔ دانش آموزان است).

قضیه ۴ ـ از دو وتر نامتساوی یک دایره آن که بزرگتر است به مرکز نزدیکتر است. صورت نمادی قضیه را بنویسید.

برهان ـ بر دایرهٔ C ابتدا از نقطهٔ A (شکل ۵ - ۱۴)، کمان AM را مساوی با کمان A'B' جدا می‌کنیم، چون $AB > A'B'$، نقطهٔ M بر $\widehat{AB}$ بین A و B ودرآن طرفی از وتر AB قرار می‌گیرد که مرکز دایره در آن طرف قرار ندارد. پس اگر عمودی که از مرکز دایره بر وتر AM فرود می‌آید، آن وتر را در نقطهٔ H_1 و وتر AB را در نقطهٔ K قطع کند:



شکل (۵ - ۱۴)

$$AM = A'B' \Longrightarrow OH_1 = OH'$$

اما $\widehat{AB} > \widehat{AM}$ پس وترهای AB و AM در یک امتداد نیستند و پاره خط OH_1 که بر وتر AM عمود است، بر وتر AB عمود نیست پس:

$$\left.\begin{array}{l} OH < OK \\ OK < OH_1 \;\text{و}\; OH_1 = OH' \end{array}\right\} \Longrightarrow OH < OH'$$

قضیهٔ عکس ـ اگر دو وتر از مرکز دایره به یک فاصله نباشند، وتری که به مرکز نزدیکتر است از وتر دیگر بزرگتر است.

قضیه را با نمادهای ریاضی بنویسید و ثابت کنید.

تمرین

۱- کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام نادرست است؟

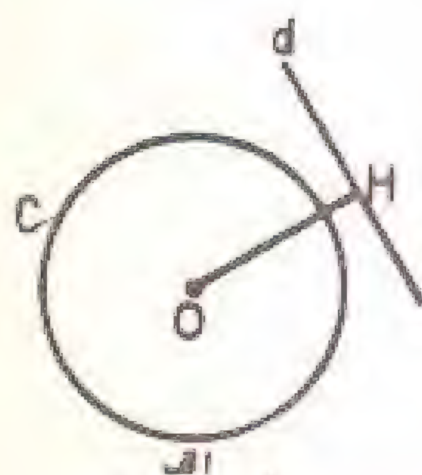
- هر قطر دایره وتری از دایره است. - هر وتر دایره یک قطر دایره است. - قطرهای یک دایره هم‌اندازه‌اند. - بزرگترین وتری که از یک نقطهٔ داخل دایره می‌گذرد قطری است که بر آن نقطه مرور کند. - بعضی وترهای یک دایره شعاع دایره‌اند.

۲- بر دایرهٔ (۴ سانتیمتر , O) C نقطه‌ای تعیین کنید که از نقطهٔ A که به فاصلهٔ ۶ سانتیمتر از مرکز دایره واقع است به فاصلهٔ ۴ سانتیمتر باشد.

۳- دو وتر متساوی از دایرهٔ C (O , R) در نقطهٔ M متقاطعند، ثابت کنید پاره‌خطهایی که به وسیلهٔ نقطهٔ تقاطع روی دو وتر پدید می‌آیند دو به دو مساوی یکدیگرند.

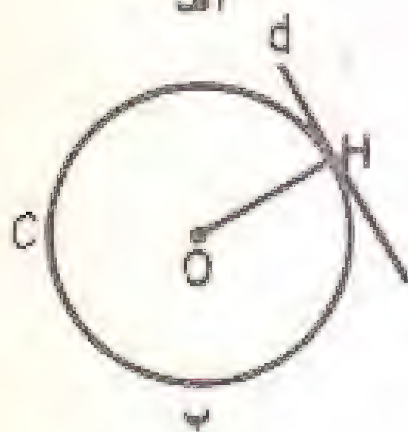
۴- ثابت کنید هر دو وتر متوازی که بر دو انتهای یک قطر از دایره می‌گذرند متساویند.

۵- ثابت کنید هر دو وتر متساوی که بر دو انتهای یک قطر از دایره می‌گذرند و در دو طرف قطر قرار دارند متوازیند.



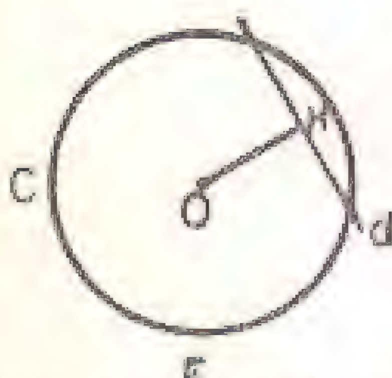
(۲-۳) - اوضاع نسبی خط و دایره- خط d و دایره (R و O) C در یک صفحه نسبت بهم سه وضع دارند.

۱- خط d و دایره (R و O) C هیچ نقطهٔ مشترکی ندارند شکل (الف) اگر فاصلهٔ مرکز دایره را از خط d با OH نشان دهیم دراین حالت $OH > R$ (چرا؟)



۲- خط d و دایره (R و O) C در یک نقطه مشترکند. شکل (ب) در این حالت خط و دایره را مماس می‌نامند و $OH = R$ است (چرا؟)

۳- خط d و دایره (R و O) C در دو نقطه مشترکند. در این حالت خط و دایره را متقاطع می‌نامند و $OH < R$. شکل ج

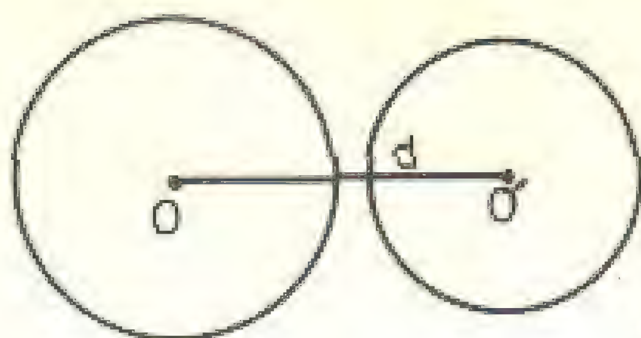


نتیجه - درهر دایره شعاع درنقطهٔ تماس برخط مماس عموداست (چرا؟)

برعکس - اگر $OH > R$ ، $OH = R$ و یا $OH < R$ باشد به ترتیب خط و دایره، متخارج، مماس و یا متقاطعند.

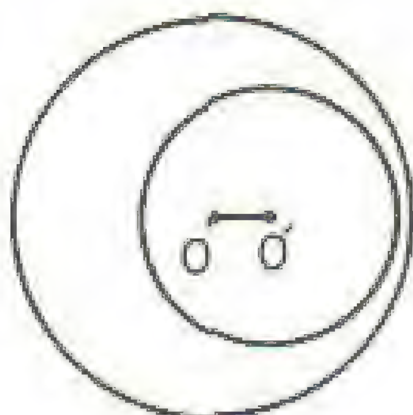
(۲-۴) - اوضاع نسبی دو دایره - دودایره (R و O) C و (R' و O') C رادرنظر می‌گیریم پاره خط 'OO را خط‌المرکزین می‌نامند، معمولا طول آنرا با d نشان می‌دهند. این

دو دایره درصفحه نسبت بهم پنج وضع دارند.



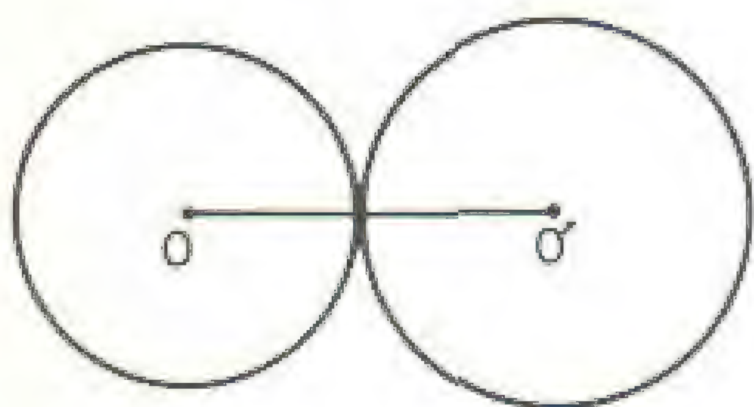
د

۱ـ دو دایره هیچ نقطهٔ مشترك ندارند وتمام نقاط هریك ازآنها درخارج دیگری واقع است شکل (د) . در این حالت دو دایره را متخارج می‌نامند و $d>R+R'$ است.



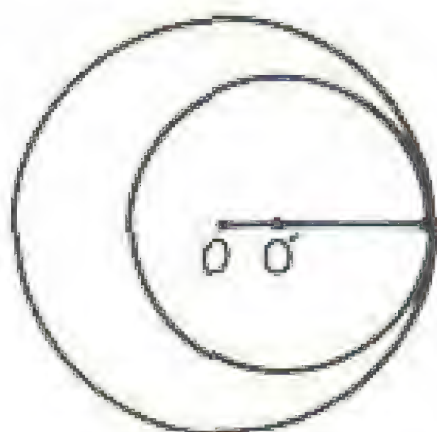
ه

۲ـ دو دایره هیچ نقطهٔ مشترك ندارند وتمام نقاط یکی ازآنها در داخل دیگری واقع است . شکل (ه) دراین‌حالت دودایره‌را متداخل می‌نامندو $d<|R-R'|$ است .



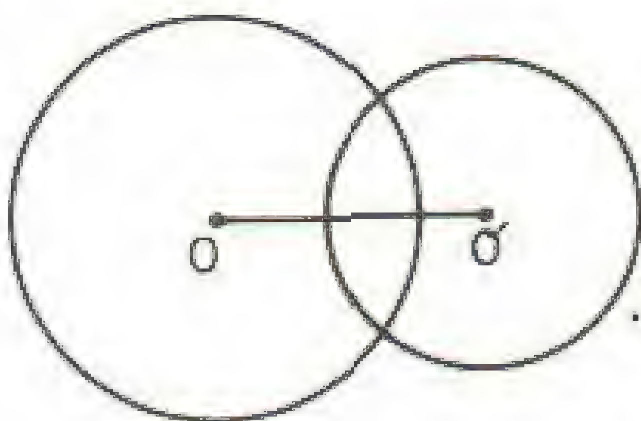
و

۳ـ دو دایره دریك نقطه مشترکند وتمام نقاط هر یك ازآنها درخارج دیگری واقع است شکل (و) دراین حالت دو دایره را مماس خارج می‌نامند . (نقطهٔ مشترك روی‌خط‌المرکزین است) (چرا؟) و $d=R+R'$.



ز

۴ـ دو دایره دریك نقطه مشترکند وتمام نقاط یکی ازآنها داخل دیگری قرار دارد و دراین حالت دو دایره را مماس مشترك داخلی می‌نامند و $d=|R-R'|$ شکل (ز) .



ح

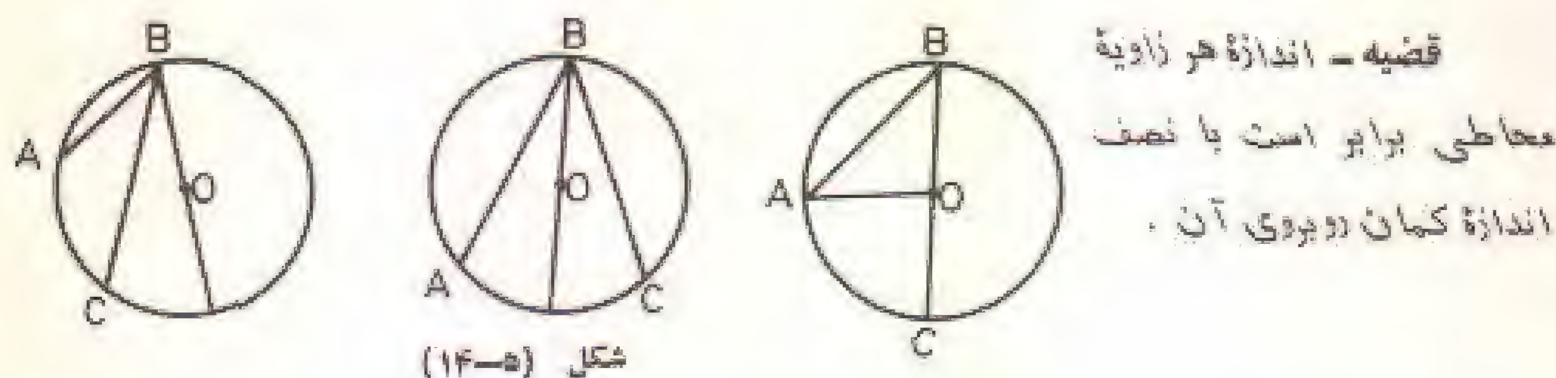
۵ـ دو دایره در دو نقطه مشترکند شکل (ح) در این حالت $d<R+R'$.

برعکس ـ اگر $d>R+R'$ ، $d=R+R'$ ، $d<R+R'$ ، $d=|R-R'|$ ویا $d<|R-R'|$ باشند. دودایره به‌ترتیب متخارج، مماس خارج، متقاطع، مماس داخل،ویامتداخل‌می‌باشند(اثبات بعهدهٔدانش‌آموزان‌است).

۳ــ زاویه در دایره

(۳ــ۱)ــ زاویهٔ محاطی ــ زاویهٔ محاطی زاویه‌ای است که رأس آن یك نقطه ازدایره واضلاع آن دو وتر از همان دایره باشند. کمانی از دایره را که به دوضلع زاویهٔ محاطی محدود است ودر داخل آن زاویه قرار دارد، کمان مقابل به‌آن زاویهٔ محاطی می‌گوئیم.

قضیه ــ اندازهٔ هر زاویهٔ محاطی برابر است با نصف اندازهٔ کمان روبروی آن.



شکل (۵ــ۱۴)

برهان ــ برای اثبات این قضیه سه حالت درنظر می‌گیریم:

حالت اول: یکی ازاضلاع زاویهٔ محاطی قطری از دایره است. اگــراز A بمرکز دایره وصل کنیم،زاویهٔ مرکزی $\angle AOC$ بدست می‌آید که زاویهٔ خارجی مثلث‌متساوی‌الساقین‌OAB است، بنابراین مساوی مجموع دو زاویهٔ غیرمجاورآن است.

$$\angle AOC = \angle A + \angle B = ۲\angle B$$

یعنی زاویهٔ محاطی $\angle ABC$ مساوی نصف‌زاویهٔ مرکزی $\angle AOC$ می‌باشد،

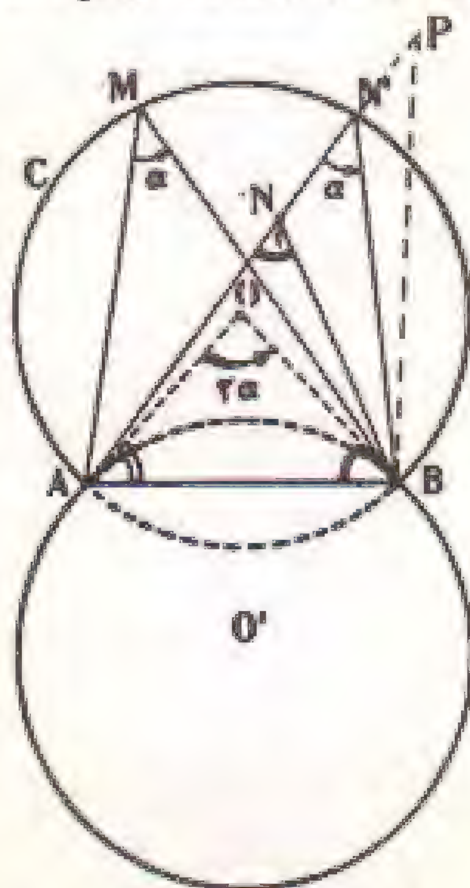
$$\angle ABC = \frac{۱}{۲}\angle AOC$$

چون اندازهٔ زاویهٔ مرکزی $\angle AOC$ برابر اندازهٔ کمان $\widehat{AC}$ می‌باشد، نتیجه می‌شود که اندازهٔ زاویهٔ$\angle ABC$ مساوی نصف اندازه کمان مقابل‌خود می‌باشد.

تمرین ــ با استفاده از شکل‌های (۵ــ۱۴) قضیه را در دوحالت دیگر کــه اضلاع زاویهٔ محاطی ازمرکز دایره نمی‌گذرند ثابت کنید.

(۳ــ۲) ــ کمان حاوی زاویهٔ معین

معین ــ نقاط ثابت A و B و زاویــهٔ حادهٔ α را در نظر مــی‌گیریــم (شکل ۵ــ۱۵). در نقاط مذکور بر خط AB و در یك طــرف آن خط دو زاویه به اندازهٔ $۹۰^\circ - \alpha$ می‌سازیــم. اضلاع این دو زاویه در نقطه‌ای مانند O تلاقی می‌کنند (چرا؟). دایره‌ای که به‌مرکز O و بــه شعاع



شکل (۵ــ۱۵)

OA یا OB رسم کنیم ازدونقطهٔ A و B می‌گذرد. اگر نقطهٔ M را بر کمان بزرگتر نظیر وتر AB از این دایره ، ($\widehat{ACB} > 180°$)، که با مرکز آن در یک طرف پاره‌خط AB قرار دارد اختیار کنیم ، $\angle AMB = \frac{1}{2} \angle AOB = \alpha$ (چرا؟) .یعنی هرنقطهٔ واقع بر کمان ACB رأس زاویه‌ای است مساوی α که اضلاع آن از دو نقطهٔ ثابت A و B می‌گذرند .

اکنون ثابت می کنیم که رأس هر زاویهٔ مساوی α که اضلاعش بر دونقطهٔ A و B بگذرند بر $\widehat{ACB}$ از دایرهٔ O قرار دارد . در حقیقت اگر فرض شود که نقطه‌ای مانند N ، مثلاً در درون دایره واقع باشد ، یکی از دو خط NA یا NB و مثلاً NA دایره را در نقطه‌ای مانند N' قطع می کند و در مثلث NN'B ؛ $(\angle N_1 > \angle N' , \angle N' = \alpha) \Longrightarrow \angle N_1 > \alpha$

به همین ترتیب ثابت می‌شود که اگر P نقطه‌ای واقع در برون دایره باشد $\angle APB < \alpha$ است.پس هرنقطهٔ M ازصفحهٔ دایره باشرط آن که $\angle AMB = \alpha$ باشد ، بر $\widehat{ACB}$ واقع است .

کمان ACB را که با مرکز دایره در یك طرف وتر AB قرار دارد و دارای خاصیت فوق است ، کمان حاوی زاویهٔ α وابسته به پاره‌خط AB می نامیم . این کمان را کمان در خود زاویهٔ α وابسته به پاره‌خط AB نیز می گویند .

اگر بر خط AB در دو نقطهٔ A و B و در طرف دیگر این پاره‌خط زاویه‌هایی مساوی $90° - \alpha$ بنا کنیم ، بههمان ترتیب دایرهٔ دیگر O' ازصفحهٔ P حاصل می‌شود که عیناً دارای همین خاصیت است . بنابراین می توان گفت :

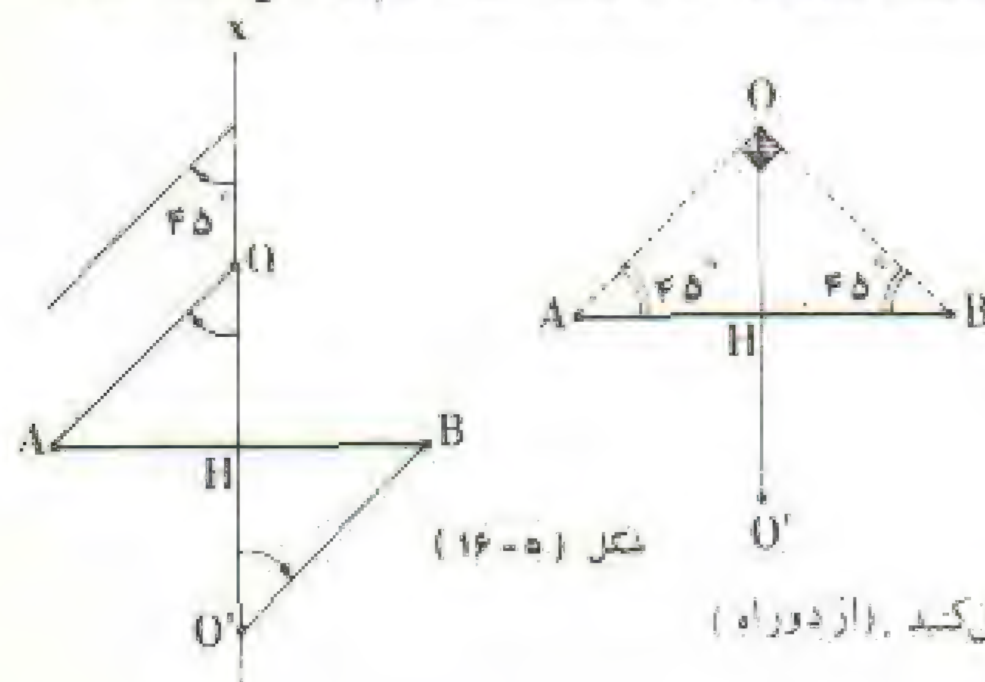
مکان هندسی نقاطی از یك صفحه که از وصل کردن آنها به دو نقطهٔ ثابت A و B از آن صفحه زاویه‌ای مساوی α پدید می‌آید ، کمانهایی است از دو دایرهٔ متساوی در آن صفحه‌که بر دو نقطهٔ مزبور می گذرند و زاویهٔ مرکزی مقابل به وتر مشترك آنها مساوی 2α است .

بدیهی است کمان کوچکتر AB از دایرهٔ C(O,R) نیز حاوی زاویهٔ منفرجهٔ $180° - \alpha$ وابسته به‌پاره‌خط AB است وهمچنین کمان مشابه آن از دایرهٔ دیگر نیزهمین خاصیت را دارد.

تمرین ـ خاصیت کمان حاوی یك زاویه را بـه صورت شرط لازم و کافی بیان کنید .

مسئله ـ پاره‌خط AB مساوی ۳ سانتیمتر را رسم کرده و بر دو سر آن کمانهایی مرور دهید که حاوی زاویهٔ ۴۵° باشند .

راهنمایی : مسئله را با توجه به شکلهای (۵ ـ ۱۶) حل‌کنید . (از دو راه)



شکل (۵ ـ ۱۶)

تمرین

۱- از مثلثی ضلع $BC = ۴$ سانتیمتر و $\hat{A} = ۸۰°$ و ارتفاع $AH = ۲$ سانتیمتر است، آن را رسم کنید.

۲- مثلثی رسم کنید که در آن ضلع $BC = ۶$ سانتیمتر و $\hat{A} = ۶۰°$ و میانهٔ $AM = ۴$ سانتیمتر باشد.

۳- در درون مثلث ABC نقطهٔ M را چنان تعیین کنید که:

$$\angle AMB = \angle BMC = \angle CMA$$

(۳ - ۳) - زاویه‌هایی که بین وترها و مماسهای دایره پدید می‌آیند - هرگاه دو وتر یا دو مماس یا یک وتر و یک مماس در درون یا برون دایره‌ای برخورد کنند بین آنها زاویه‌هایی پدید می‌آید و کمانهایی از دایره به نقاط تقاطع اضلاع زاویه‌ها با دایره محدود می‌شوند. بین اندازه‌های زاویه‌های مزبور و اندازه‌های کمانهای مقابل آنها روابطی برقرار است که آنها را با قضیه‌های زیر بیان می‌کنیم.

قضیهٔ ۱ - اندازهٔ زاویه‌ای که بین دو وتر متقاطع در درون یک دایره پدید می‌آید نصف مجموع اندازه‌های دوکمانی از دایره است که به آن دو وتر محدودند و در آن زاویه و زاویهٔ متقابل به رأس آن قرار دارند.

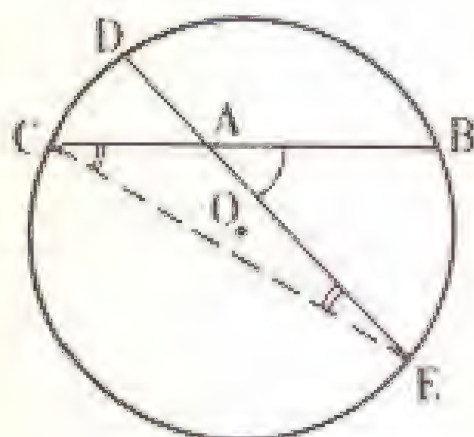
برهان - در مثلث EAC از شکل (۵ - ۱۷):

$$\angle BAE = \angle ACE + \angle CEA$$

اما دو زاویهٔ طرف دوم زاویه‌های محاطی هستند

بنابراین: $$\angle BAE = \frac{1}{2}\widehat{BE} + \frac{1}{2}\widehat{DC}$$

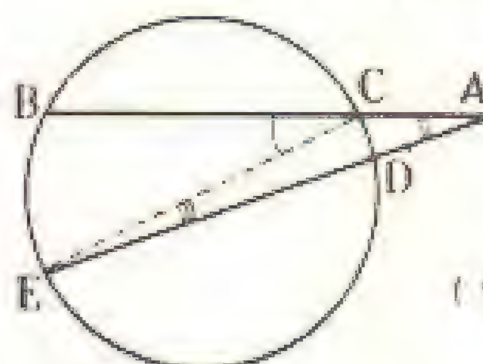
یا $$\angle BAE = \frac{1}{2}(\widehat{BE} + \widehat{DC})$$



شکل (۵ - ۱۷)

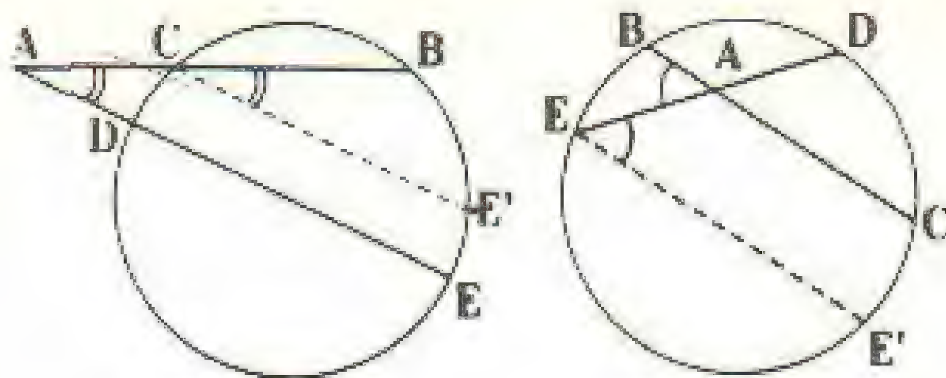
قضیهٔ ۲ - اندازهٔ زاویه‌ای که بین امتدادهای دو وتر در خارج دایره پدید می‌آید نصف تفاضل اندازه‌های دو کمانی از دایره است که به آن دو وتر محدودند و در زاویه قرار دارند.

قضیه را با توجه به شکل (۵ - ۱۸) به‌صورت $\angle CAE = \frac{1}{2}(\widehat{BE} - \widehat{CD})$ ثابت کنید.

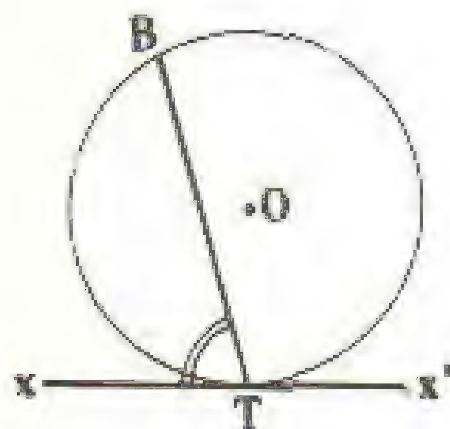


شکل (۵ - ۱۸)

آیا با توجه به شکلهای (۵ - ۱۹) می‌توانید قضایای بالا را به صورت دیگر ثابت کنید ؟



شکل (۵ - ۱۹)



شکل (۵ - ۲۰)

زاویهٔ بین مماس و وتر - هر زاویه که رأس آن یک نقطه از دایره و یک ضلع آن مماس بر دایره در آن نقطه و ضلع دیگرش وتر دایره باشد، زاویهٔ ظلّی نامیده می‌شود. مانند $\angle xTB$ در شکل (۵ - ۲۰).

کمانی از دایره را که در داخل زاویهٔ ظلی واقع می‌شود، و در حقیقت کمان نظیر وتر مزبور است، کمان مقابل زاویهٔ ظلی می‌گوییم.

قضیهٔ ۳ - اندازهٔ هر زاویهٔ ظلی نصف اندازهٔ کمان مقابل آن از دایره است.

برهان - قطر TT' را که از نقطهٔ تماس می‌گذرد رسم می‌کنیم (شکل ۵ - ۲۱). در مثلث TBT' :

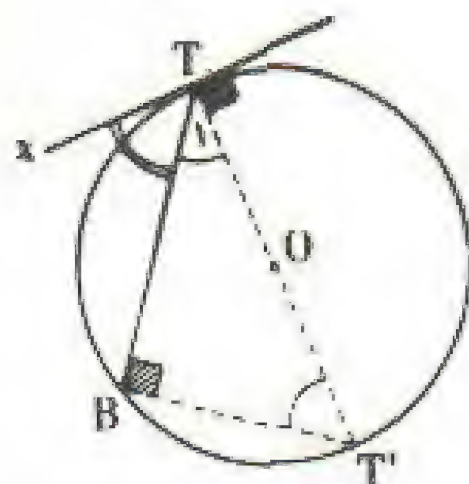
$$\angle B = \frac{1}{2}\widehat{TT'} = 90^\circ \Longrightarrow \hat{T}_1 + \hat{T}' = 90^\circ$$

از طرفی :

$$OT \perp Tx \Longrightarrow \hat{T}_1 + \widehat{xTB} = 90^\circ$$

و از آنجا :

$$\angle xTB = \angle T'$$

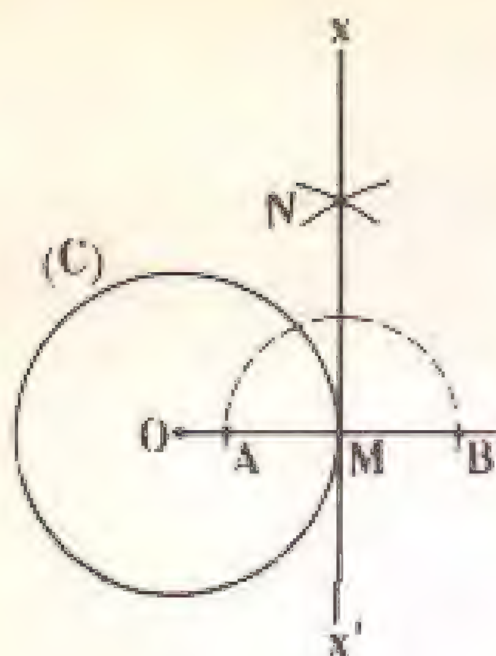


شکل (۵ - ۲۱)

اما $\angle T'$ زاویه‌ای محاطی و مقابل به $\widehat{TB}$ و در نتیجه مساوی نصف این کمان است. پس $\angle xTB = \frac{1}{2}\widehat{TB}$.

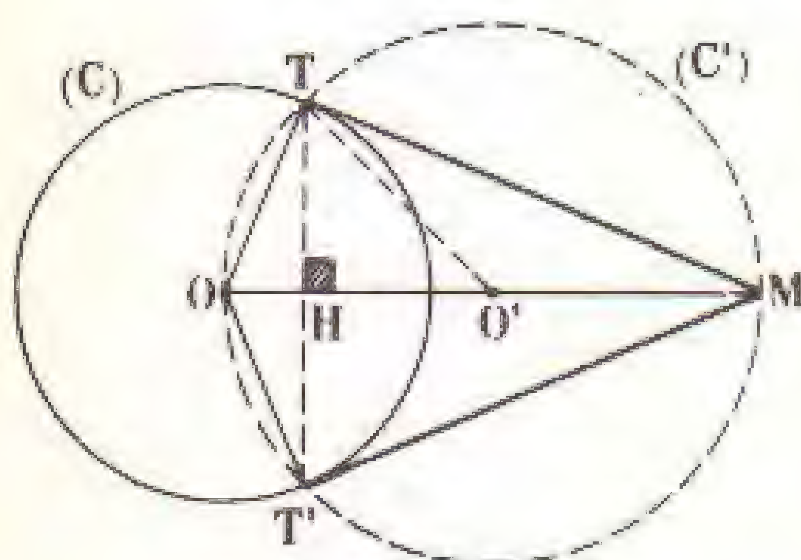
مسئله - خطی رسم کنید که از نقطهٔ مفروض M بگذرد و بر دایرهٔ $C(O, R)$ از این صفحه مماس باشد.

حل: اگر نقطهٔ M بر دایره واقع باشد، خط $x'Mx$ که در آن نقطه بر شعاع OM عمود رسم شود در نقطهٔ M بر دایره مماس و بنابراین جواب مسئله است و مسئله فقط یك جواب دارد (چرا؟) (شکل ۵ - ۲۲).



شکل (۵ - ۲۲)

در حالتی که نقطهٔ M در بیرون دایره باشد، برای پی بردن به طریقهٔ رسم مماس ملاحظه می کنیم که اگر MT بر دایرهٔ (C) مماس و نقطهٔ O' وسط پاره‌خط OM باشد، در مثلث قائم‌الزاویهٔ OTM: $O'T = \frac{1}{2}OM$ (چرا؟)، یعنی خطی که از نقطهٔ M می گذرد و بر دایرهٔ (C) مماس است با آن دایره در نقطه‌ای به فاصلهٔ $\frac{1}{2}OM$ از نقطهٔ O' مماس می‌شود. بنابراین اگر به مرکز O' و به‌شعاع $\frac{1}{2}OM$ دایره‌ای رسم کنیم، دایرهٔ (C) را در نقطه‌ای مانند T قطع می کند و از وصل کردن آن نقطه به نقطهٔ M خط مماس رسم‌می‌شود (شکل ۵-۲۳).



شکل (۵ - ۲۳)

چون نقطهٔ M در بیرون دایرهٔ C(O , R) فرض شده، $OM > R$ و از این رابطه می‌توان داشت $2OO' > R$ یا $OO' > R - OO'$ یا $OO' > R - \frac{1}{2}OM$ یعنی خط‌المرکزین دو دایره از تفاضل دو شعاع آنها بزرگتر است. از طرفی می توان نوشت $OO' < R + OO'$ (چرا؟) یا $OO' < R + \frac{1}{2}OM$ یعنی خط‌المرکزین دو دایره از مجموع دو شعاع آنها کوچکتر است. پس دو دایره در دو نقطهٔ T و T' یکدیگر را قطع می‌کنند و مسئله دو جواب دارد.

این طریقهٔ رسم مماس از یك نقطه بر دایره کلی است و می‌توان دید که اگر $OM = R$ یا $2OO' = R$ یعنی $OO' = R - OO'$ یا $OO' = R - \frac{1}{2}OM$ باشد، دایرهٔ (C') با دایرهٔ (C) مماس در درون است و با آن فقط یك نقطهٔ مشترك داشته ومسئله فقط یك جواب دارد. اگر $OM < R$ یعنی نقطهٔ M داخل دایرهٔ C(O , R) باشد، دو دایره هیچ نقطهٔ مشترکی نخواهند داشت (چرا؟) و نقطهٔ T وجود ندارد. یعنی از نقطهٔ واقع در درون دایره نمی‌توان مماس بر آن رسم کرد، زیرا همهٔ نقاط خط مماس بر دایره (غیر از نقطه‌تماس) در بیرون دایره واقعند.

در شکل (۵-۲۳)، که از نقطهٔ M دو مماس MT و MT' بر دایرهٔ (C) رسم شده‌اند،

$\triangle OTM = \triangle OT'M$ (چرا ؟) در نتیجه $MT = MT'$ و $\angle T'MO = \angle TMO$ و $\angle T'OM = \angle TOM$ و در مثلث متساوی‌الساقین TMT' ، $MH \perp TT'$ است (چرا ؟)
بنابراین می‌توان نوشت :

قضیه ۴ ــ هرگاه از یك نقطه در بیرون دایره‌ای دو مماس بر آن دایره رسم شود :

۱ــ قطعاتی از مماسها که بین آن نقطه و نقاط تماس محصورند متساویند .

۲ــ خطی که آن نقطه را به مرکز دایره وصل کند زاویهٔ بین دو مماس و همچنین زاویهٔ بین شعاعهای نقاط تماس را نصف می‌کند و بر وتری از دایره که دو نقطهٔ تماس را به هم وصل می‌کند عمود است و آن را نصف می‌کند .

تمرین

۱ــ دو دایرهٔ هم‌مرکز $C(O, R)$ و $C'(O, R')$ با فرض $R > R'$ در نظر بگیرید و ثابت کنید مماسهایی که از نقاط مختلف واقع بر دایرهٔ C بر دایرهٔ C' رسم می‌شوند متساویند .

۲ــ در مسئلهٔ قبل ثابت کنید وترهای دایرهٔ C که بر دایرهٔ C' مماس باشند متساویند .

۳ــ مکان هندسی نقاطی مانند M را پیدا کنید که اگر از آن نقاط مماسهایی بر دایرهٔ مفروض $C(O, R)$ که با M در یك صفحه است رسم کنیم ، مساوی طول معین l باشند .

۴ ــ کمان $AB = ۶۰°$ را بر دایرهٔ O اختیار کرده در نقاط A و B دو مماس بر دایره رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ P قطع کنند . اندازه‌های زاویه‌های مثلث PAB را تعیین کنید .

۵ ــ دو وتر AB و CD از دایرهٔ O در نقطه‌ای مانند P درون دایره متقاطعند چنان که $\angle P = (۷x + ۱۱)°$ و کمانهای مقابل به آن از دایره به‌ترتیب به‌اندازه‌های $(۲x)°$ و $(۸۸ + x)°$ اند؛ اندازهٔ زاویهٔ P را تعیین کنید .

۶ ــ دو وتر عمود بر هم از دایرهٔ $C(O, R)$ بر دایره چهار کمان پدید آورده‌اند . اگر اندازه‌های دو کمان از چهار کمان مزبور $۴۰°$ و $۶۰°$ باشند ، اندازه‌های دو کمان دیگر را تعیین کنید .

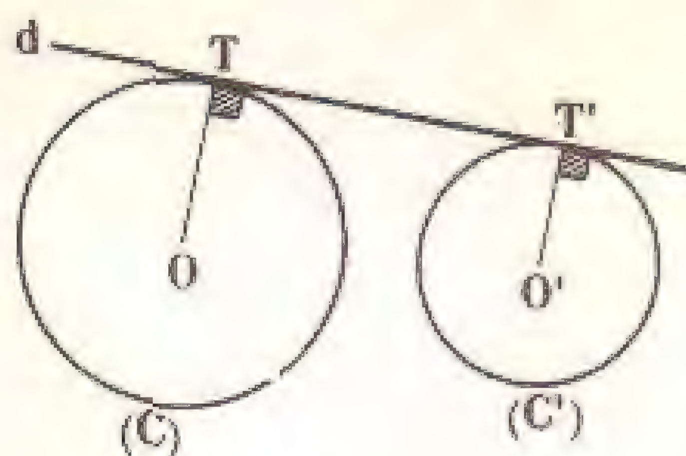
۷ ــ دو دایرهٔ مساوی در نقطه‌ای مانند T مماس بیرونی هستند و AB و CD دو قطر متوازی از این دو دایره‌اند ، ثابت کنید چهار ضلعی $ABCD$ لوزی است .

۸ ــ ثابت کنید خطی که در وسط یك کمان از دایره‌ای بر آن دایره مماس باشد با وتر آن کمان موازی است .

۹ــ بر دایرهٔ $C(O, R)$ مماسی رسم کنید که با خط d واقع در صفحهٔ دایره موازی باشد

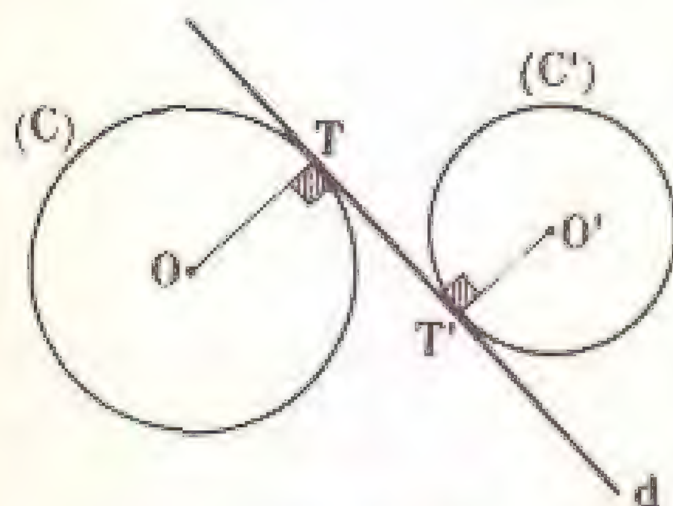
۱۰ــ دو خط d و d' در صفحهٔ P مفروضند؛ دایره‌ای به شعاع معین R رسم کنید که بر هر دو خط مزبور مماس باشد .

۴ـ مماسهای مشترک دو دایره



شکل (۵-۲۴)

(۴ - ۱) - تعریف - خط d در نقطهٔ T بر دایرهٔ $C(O, R)$ مماس است، نقطهٔ دیگر T' را بر این خط در نظر گرفته و دایره‌ای مانند $C'(O', R')$ رسم می‌کنیم که در این نقطه بر خط d مماس باشد. در این صورت خط d بر دو دایرهٔ C و C' مماس است و آن را مماس مشترک دو دایره می‌گوییم (شکلهای ۵ - ۲۴ و ۵ - ۲۵).

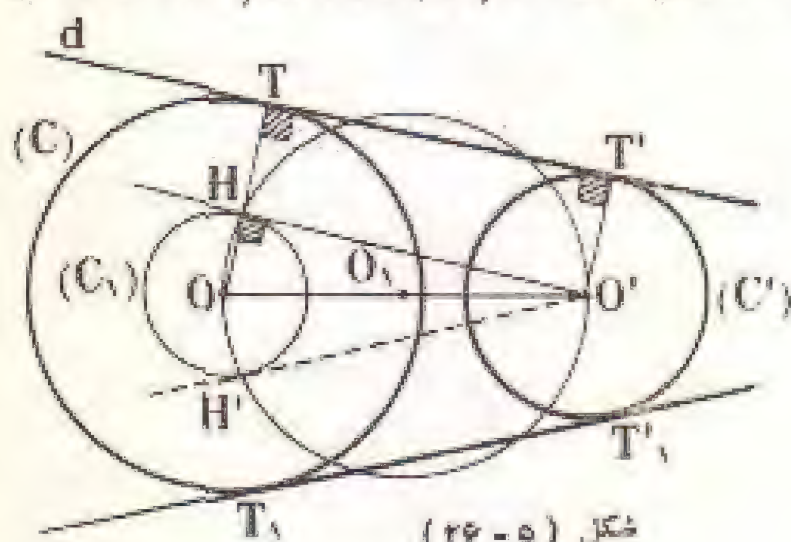


شکل (۵-۲۵)

دو دایره‌ای که بر خط d مماسند ممکن است هر دو در یک طرف این خط واقع باشند یا در دوطرف آن. درحالتی که دو دایرهٔمماس برخط d در یک‌طرف‌این‌خط واقع باشند، یعنی‌خط مماس ازبین دودایره نمی‌گذرد، آن را مماس مشترک خارجی دو دایره می‌گوییم (شکل ۵ - ۲۴)، و در حالتی که دو دایره در دو طرف خط مماس واقعند، به بیان دیگر مماس مشترک بین دو دایره قرار داشته باشد، آن را مماس مشترک داخلی دو دایره می‌نامیم (شکل ۵ - ۲۵).

(۴ - ۲) - رسم مماس مشترک دو دایره

رسم مماس مشترک خارجی دو دایره - دایره‌های $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ را در صفحهٔ P درنظرمی‌گیریم؛ اگر خط d در نقاط T و T' براین دو دایره مماس باشد ومرکزهای دودایره دریک طرف آن واقع باشند (شکل ۵ - ۲۶)، دو شعاع OT و O'T' بر خط d عمودند،بنابراین موازی یکدیگرند. پس اگر $R > R'$ باشد، خطی که از نقطهٔ O' مرکز

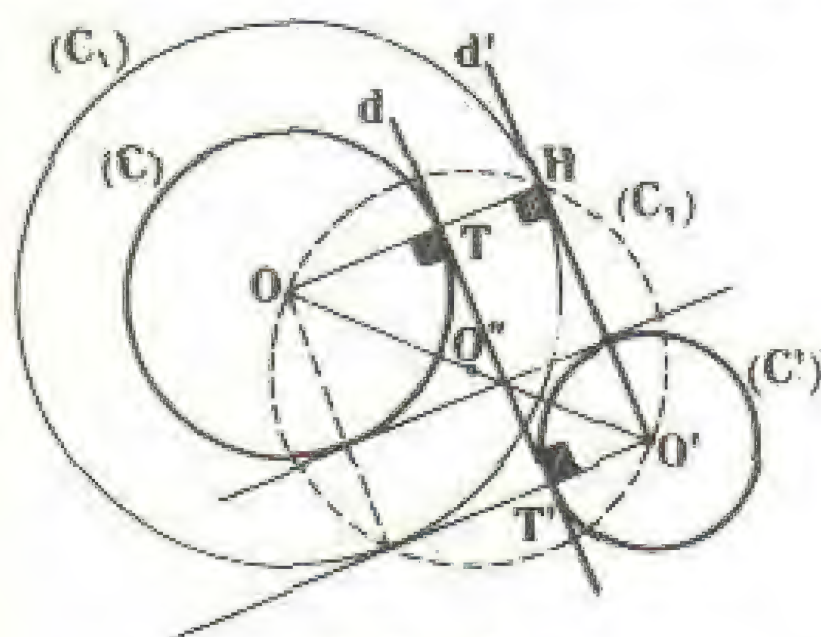


شکل (۵-۲۶)

دایرهٔ کوچکتر) موازی مماس مشترك رسم شود ، شعاع OT را در نقطه‌ای مانند H قطع می‌کند (چرا؟) ، و بر آن عمود است . بنابراین چهارضلعی $HTT'O'$ مستطیل وخط $O'H$ بامماس‌مشترك خارجی دو دایره موازی است. درنتیجه اگر خط $O'H$ مشخص باشد، خطی که موازی آن و مماس بر یکی از دو دایره رسم شود همان مماس مشترك خارجی دو دایره است . اما مثلث $OO'H$ را به آسانی می‌توان رسم کرد ، به این ترتیب که به مرکز O و به شعاع $R-R'$ دایره‌ای رسم می‌کنیم تا دایرهٔ به قطر OO' را در نقطهٔ H قطع کند و مثلث $OO'H$ و در نتیجه خط $O'H$ ، که امتداد مماس مشترك را مشخص می‌کند ، به دست آید .

در حالتی که $R=R'$ باشد چهارضلعی $OO'T'T$ مستطیل است (چرا؟) ، ومماس مشترك خارجی دو دایره (در صورت وجود) ، موازی خط‌المرکزین است ، یعنی خود خط‌المرکزین راستای مماس مشترك خارجی دو دایره را مشخص می‌کند .

رسم مماس مشترك داخلی دو دایره ـ دو دایرهٔ $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ واقع در یك صفحه و خط d را که در دو نقطهٔ T و T' بر این دو دایره مماس است و مرکزهای دو دایره در طرفین آن واقعند در نظر می‌گیریم (شکل ۵ ـ ۲۷) . از نقطهٔ O' خط d' را موازی d رسم می‌کنیم . این خط امتداد شعاع OT را در نقطه‌ای مانند H قطع می‌کند و چهار ضلعی $TT'O'H$ مستطیل است . پس $OH \perp d'$ و $OH=R+R'$ است. از اینجا می‌توان نتیجه گرفت که خط $O'H$ که از مرکز یك دایره موازی مماس مشترك داخلی دودایره رسم شود بر دایره‌ای به مرکز دایرهٔ دیگر و شعاعی مساوی مجموع دو شعاع دایره‌ها مماس است و از همین خط برای به دست آوردن امتداد مماس مشترك داخلی دو دایره استفاده می‌کنیم .



شکل (۵ ـ ۲۷)

با توجه به شکل طریقهٔ ترسیم مماس مشترك داخلی دو دایره را بیان کنید .

هردو دایرهٔ برون هم دارای دو مماس مشترك داخلی هستند و دو دایرهٔ مماس برونی فقط یك مماس مشترك داخلی دارند . دایره‌های متقاطع ، مماس درونی و درون هم مماس مشترك داخلی ندارند.

تمرین

۱ـ اگر شعاعهای دو دایره متساوی باشند، مماس مشترك خارجی آنها را به چه ترتیب رسم می کنید؟

۲ـ ثابت کنید مماس مشترك داخلی دو دایرهٔ مماس بر هم از وسط مماسهای مشترك خارجی آنها می گذرد.

۳ـ ثابت کنید که در دو دایرهٔ مماس برونی، مماس مشترك خارجی بر دایره‌ای که به قطر خط‌المرکزین رسم شود، مماس است.

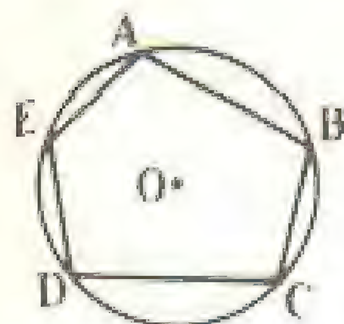
۴ـ دو دایره به شعاعهای ۲ و ۳ سانتیمترند و فاصلهٔ مرکزهای آنها ۶ سانتیمتر است، این دو دایره چند مماس مشترك خارجی دارند؟ مماسهای مشترك آنها را رسم کنید.

۵ـ دو دایرهٔ O و 'O در نقطهٔ A مماس برونی هستند و خط 'TT یك مماس مشترك خارجی آنهاست، ثابت کنید 'TAT∠ قائمه است.

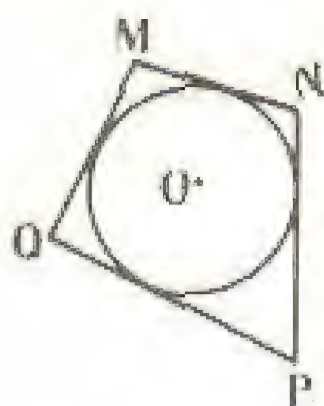
۶ـ مماس‌های مشترك دو دایره را در حالت‌های مختلف آنها رسم کنید.

۵- چند ضلعیهای محاطی و محیطی

(۵ - ۱) - تعریف - چند ضلعی محاطی آن است که همهٔ رأسهایش بر یك دایره باشند (شکل ۵ - ۲۸). دایره‌ای را که بر رأسهای یك چند ضلعی محاطی می‌گذرد محیط بر چندضلعی یا دایرهٔ محیطی چندضلعی می‌نامند.



شکل (۵ - ۲۸)

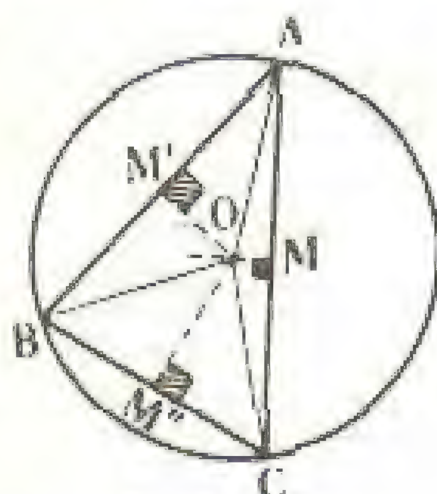


شکل (۵ - ۲۹)

چند ضلعی محیطی آن است که همهٔ اضلاعش بر یك دایره مماس باشند (شکل ۵ - ۲۹). دایره‌ای را که بر اضلاع یك چند ضلعی محیطی مماس است محاط در چند ضلعی یا دایرهٔ محاطی چند ضلعی می‌گویند.

(۵-۲) - دایره‌های محیطی و محاطی مثلث

دایرهٔ محیطی مثلث - قبلا ثابت کرده‌ایم که سه عمود منصف اضلاع هر مثلث همرسند و نقطهٔ همرسی آنها از سه رأس مثلث به یك فاصله است. اگر نقطهٔ O محل همرسی سه عمود منصف اضلاع مثلث ABC باشد (شکل ۵ - ۳۰)، دایره‌ای که به مرکز O و به شعاع OA رسم شود از هر سه نقطهٔ A و B و C می‌گذرد و مثلث در داخل آن قرار می‌گیرد. به بیان دیگر مثلث در دایره محاط می‌شود. از این روی گوییم مثلث قابل محاط شدن در دایره است.



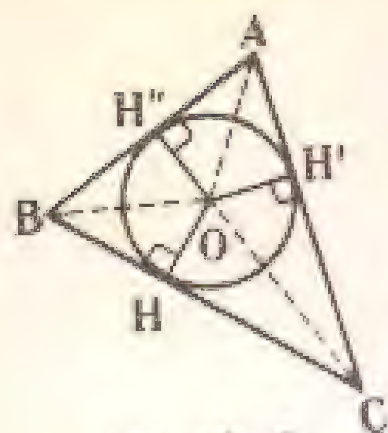
شکل (۵ - ۳۰)

دایره‌ای را که بر سه رأس یك مثلث می‌گذرد دایرهٔ محیطی آن می‌گوییم. هر مثلث فقط دارای یك دایرهٔ محیطی است. (چرا؟)

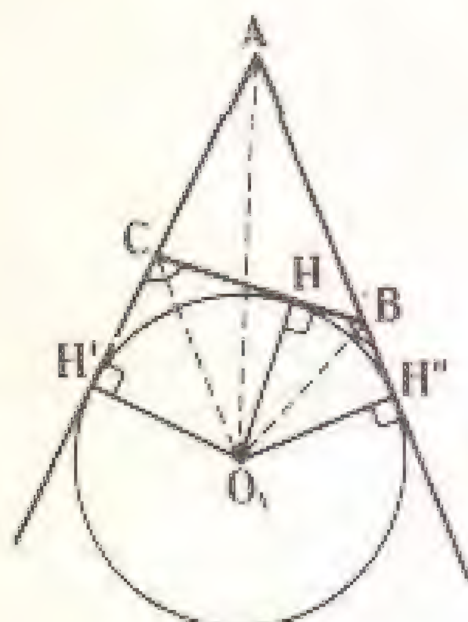
دایره‌های محاطی مثلث - نیمسازهای زاویه‌های هر مثلث همرسند و نقطهٔ همرسی آنها از سه ضلع مثلث به یك فاصله است. پس اگر به مرکز نقطهٔ همرسی سه نیمساز زاویه‌های درونی مثلث ABC، در شکل (۵ - ۳۱)، و به شعاعی مساوی فاصلهٔ آن نقطه از اضلاع مثلث، دایره‌ای رسم کنیم، این دایره بر سه ضلع مثلث مماس می‌شود (چرا؟). از این روی گوییم هر مثلث بر یك دایره محیط است یا مثلث قابل محیط شدن بر دایره است.

دایره‌ای را که سه ضلع یك مثلث بر آن مماسند و در درون آن واقع است دایرهٔ محاطی درونی مثلث می‌گوییم. هر مثلث فقط دارای یك دایرهٔ محاطی درونی است.

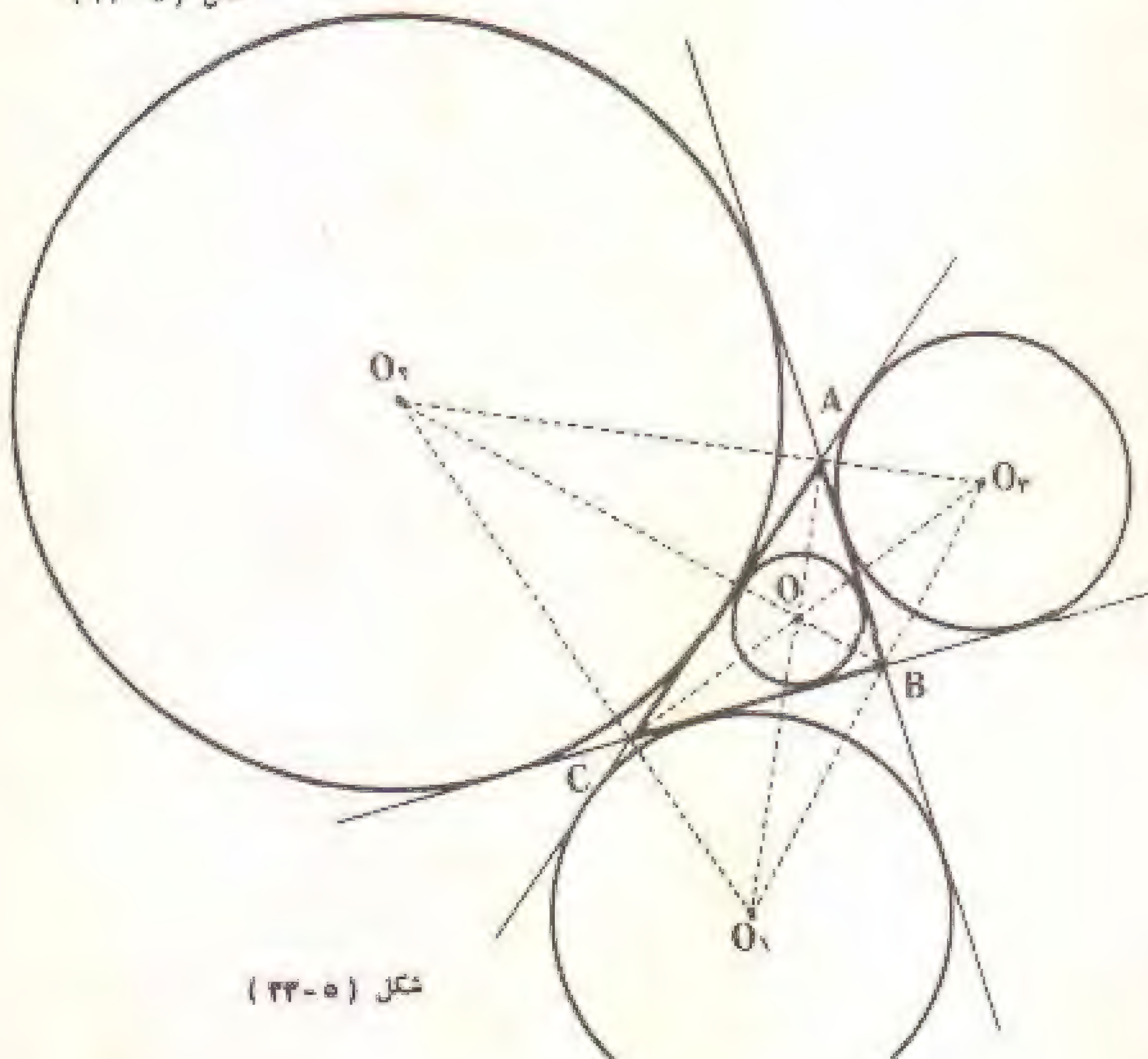
می‌دانیم که نیمساز هر زاویهٔ درونی مثلث با نیمسازهای زاویه‌های برونی غیر مجاور آن همرسند و نقطهٔ همرسی آنها از اضلاع مثلث به یك فاصله است . پس اگر به مرکز نقطهٔ O_1 محل همرسی نیمساز زاویـهٔ A و دو نیمساز زاویـه‌های برونـی B و C از مثلث ABC ، در شکل (۵- ۳۲) و با شعاعی مساوی فاصلهٔ این نقطه از اضلاع مثلث دایره‌ای رسم کنیم ، این دایره بر ضلع BC و بر امتداد دو ضلع دیگر مثلث مماس مـی‌شود . یعنی اضلاع مثلث ABC یـا امتداد آنها هر یك به نحوی بر دایرهٔ مذکور مماس است. از این روی این دایره را نیز دایرهٔ محاطی مثلث می‌گوییم. بسادگی دیده می‌شود که دایره اخیر در زاویـه A قرار گرفته است ولی درطرف بیرون ضلع BC است. از این جهت آنرا دایره محاطی برونی نظیر رأس A (یا نظیر ضلع BC) می‌نامیم .



شکل (۵-۳۱)



شکل (۵- ۳۲)



شکل (۵-۳۳)

باید توجه داشت که به همین ترتیب دایره‌های محاطی برونی نظیر دو ضلع دیگر مثلث می‌توان رسم کرد. پس: هرمثلث (یا هر سه خط راست که دو به دو در سه نقطه متقاطع باشند)، بر چهار دایره محیط است که مرکز یکی در درون مثلث قرار دارد و مرکزهای سه دایره دیگر در برون آن واقعند (شکل ۵-۳۳).

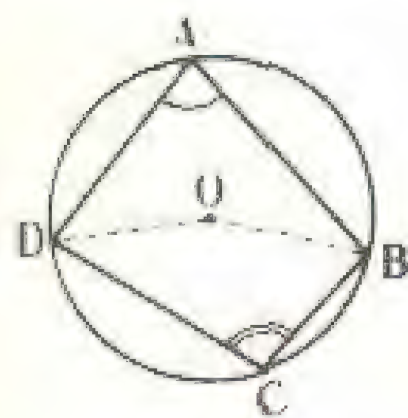
تمرین

۱- ثابت کنید که در هر مثلث متساوی‌الاضلاع دایرهٔ محاطی داخلی بر سه دایرهٔ محاطی برونی مماس است.

۲- ثابت کنید در هر مثلث ABC نیمساز زاویهٔ A زاویهٔ بین قطر دایرهٔ محیطی و ارتفاع نظیر رأس A از مثلث را نیز نصف می‌کند.

۳- مثلثی رسم کنید که شعاع دایرهٔ محیطی و یک ضلع و میانهٔ نظیر ضلع دیگری از آن معلوم باشند.

(۵-۳)- چهار ضلعیهای محیطی و محاطی - چهار ضلعیها، برخلاف مثلث، همیشه محیطی یا محاطی نیستند. یک چهار ضلعی در صورتی در یک دایره محاط یا بر دایره‌ای محیط است که خواص معین داشته باشد. در این بخش چهار-ضلعیهای محاطی و محیطی را خواهیم شناخت.



شکل (۵-۳۴)

قضیهٔ ۱ - در هر چهار ضلعی محاطی زاویه‌های مقابل مکمل یکدیگرند.

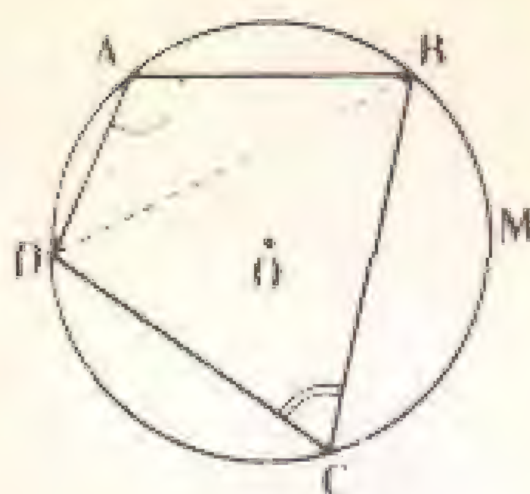
برهان - در شکل (۵-۳۴) اندازهٔ هر یک از دو زاویهٔ BAD و BCD نصف کمان مقابل به آن است. اما مجموع دو کمان مقابل آن زاویه‌ها شامل تمام دایره و مساوی چهار قائمه است، پس:

$$\widehat{BAD}+\widehat{BCD}=۱۸۰^\circ$$

و به همین دلیل

$$\widehat{CDA}+\widehat{CBA}=۱۸۰^\circ$$

قضیهٔ ۲ (عکس قضیهٔ ۱) - هر چهار ضلعی که زاویه‌های مقابل آن مکمل یکدیگر باشند، یک چهارضلعی محاطی است.



شکل (۵-۳۵)

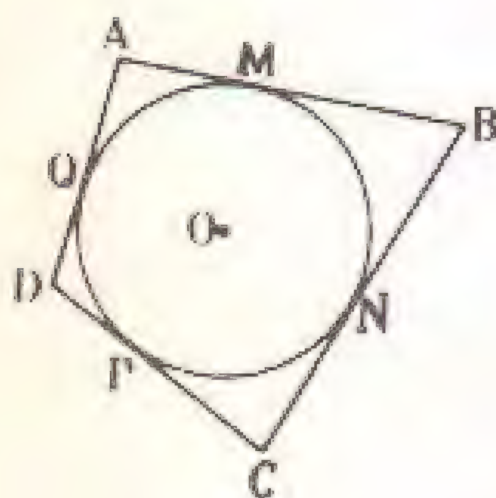
برهان ـ اگر دایرهٔ محیطی مثلث BAD را رسم کنیم و M نقطهٔ دلخواهی از کمان رو به‌روی $\hat{A}$ باشد، (شکل ۵ - ۳۵):

$$\hat{A} = \frac{1}{2}\widehat{BMD} = \frac{1}{2}(360^\circ - \widehat{BAD})$$
$$= 180^\circ - \frac{1}{2}\widehat{BAD}$$

اما بنا به فرض: $\hat{A} = 180^\circ - \hat{C}$

ازمقایسهٔ این دو رابطه: $\hat{C} = \frac{1}{2}\widehat{BAD}$

می‌دانیم کـه مکان هندسی رأسهای زاویه‌هایی که اضلاع آنها از دو نقطهٔ B و D می‌گذرند و اندازهٔ آنها $\frac{1}{2}\widehat{BAD}$ است کمان BMD از دایرهٔ مزبور است. پس نقطهٔ C بر دایرهٔ گذرنده بر سه نقطهٔ B و A و D واقع است. یعنی چهارضلعی مفروض محاطی است.



شکل (۵-۳۶)

قضیهٔ ۳ ـ مجموع دو ضلع مقابل هر چهار ضلعی محیطی برابر است با مجموع دو ضلع مقابل دیگر.

برهان ـ اگر چهار ضلعی ABCD یک چهار ضلعی محیطی باشد و اضلاع آن در نقاط M و N و P و Q بر دایرهٔ محاطی آن مماس باشند (شکل ۵ - ۳۶)، می‌توان نوشت:

$AM = AQ$ (چرا؟)

$MB = BN$

$CP = NC$

$PD = QD$

و چون این چهار رابطه را عضو به عضو با هم جمع کنیم خواهیم داشت:

$$(AM+MB) + (CP+PD) = (AQ+QD) + (BN+NC)$$

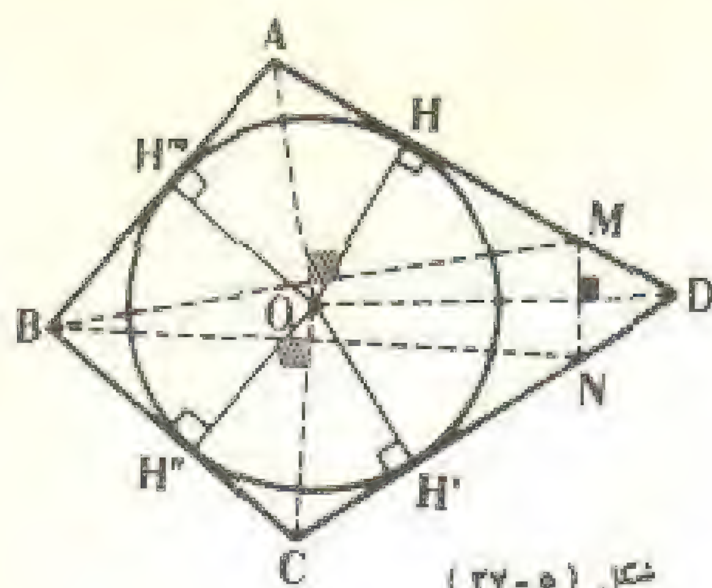
یا

$$AB+CD = AD+BC$$

قضیهٔ ۴ (عکس قضیهٔ ۳) ـ هر چهار ضلعی که مجموع دو ضلع مقابل آن با مجموع دو ضلع مقابل دیگر مساوی باشد، بر یک دایره محیط است.

برهان ـ اثبات در حالت لوزی را بعهده دانش آموزان می گذاریم. پس فرض می کنیم چهار ضلعی ABCD در شکل (۵-۳۷) لوزی نیست و $AB+CD=BC+AD$. به سادگی دیده می‌شود که $AD > AB$ و $CD > CB$ و $CD - BC = AD - AB$، اکنون $AM = AB$ را بر AD و $CN = CB$ را بر CD جدا می کنیم. با توجه به رابطهٔ فوق خواهیم داشت: $ND = MD$. چون نقاط B و M و N را دو به دو به هم وصل کنیم، مثلث BMN پدید می‌آید (چرا؟).

می‌توان ملاحظه نمود که نیمسازهای سه زاویهٔ A و C و D عمود منصفهای اضلاع مثلث MBN هستند (چرا؟)، و بنابراین در نقطه‌ای مانند O متقاربند. نقطهٔ O از اضلاع سه زاویهٔ نامبرده به یک فاصله است پس اگر به مرکز O و شعاعی مساوی OH (یا هر یک از پاره‌خطهای 'OH، "OH، '"OH) دایره‌ای رسم کنیم، این دایره بر اضلاع زاویه‌های مزبور، یعنی بر همهٔ اضلاع چهار ضلعی مماس می‌شود. بنابراین چهار ضلعی محیطی است.



شکل (۵-۳۷)

تمرین

۱- کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام یک نادرست است؟

- چهار رأس هر چهار ضلعی محاطی بر یک دایره واقعند. - چهار ضلع هر چهار ضلعی محیطی بر یک دایره مماسند. - مربع چهار ضلعی محاطی و محیطی است. - دایره‌های محاطی و محیطی هر مربع مساوی یکدیگرند. - لوزی یک چهار ضلعی محاطی است. - مستطیل چهار ضلعی محاطی است. - اگر دو زاویهٔ مجاور از یک چهار ضلعی محاطی متساوی باشند چهار ضلعی مستطیل است. - اگر دو ضلع مجاور از یک چهار ضلعی محیطی متساوی باشند چهار ضلعی لوزی است.

۲- اندازه‌های سه ضلع مجاور از یک چهار ضلعی محیطی به ترتیب ۱۱ ، ۷ و ۶ سانتیمتر است، اندازهٔ ضلع چهارم آن را تعیین کنید.

۳- ثابت کنید اگر دو ضلع مجاور از یک چهار ضلعی محیطی مساوی یکدیگر باشند، دو قطر چهار ضلعی بر هم عمودند. آیا یکدیگر را نصف می‌کنند؟

۴- دو زاویهٔ مجاور از یک چهار ضلعی محاطی °۵۵ و °۸۵ اند؛ دو زاویهٔ دیگر چهار-ضلعی را تعیین کنید، آیا می‌توان چهار کمان دایرهٔ محیطی آن را تعیین کرد؟ چرا؟

۵- ثابت کنید در هر چهار ضلعی محاطی نیمساز هر زاویه با نیمساز زاویهٔ برونی نظیر رأس مقابل آن در نقطه‌ای واقع بر دایره محیطی تلاقی می‌کنند.

۶- از نقطهٔ A وسط کمان BC از دایرهٔ (O , R) دو وتر AD و AE را رسم می‌کنیم تا وتر BC را در F و G قطع کنند. ثابت کنید چهار ضلعی DFGE محاطی است.

۷- در مثلث ABC پس از رسم ارتفاع‌ها، پای آنها را بهم وصل می‌کنیم؛ چهارضلعی‌های محاطی حاصل را مشخص کنید. (۶ جواب)

هندسه‌دانان بزرگ



اهرام مصر

خواندنی ۱

در مصر و بابل

سرگذشت ، حتی نام ، کسانی که هندسه را پی‌ریزی کردند در تیم تاریکی سپیده‌دم تاریخ محو و مبهم مانده است . بی‌شبهه لازم بود سده‌ها ، بلکه هزاره‌ها ، از عمر آدمی بگذرند تا درک مفهومهای هندسی ممکن شود . می‌گویند که هندسه در مصر زاده شد . جایی که در هر بهاران طغیان رود نیل حد و مرز کشتزارهای کرانه را معدوم می‌کرد و پس از فرونشستن سیلاب بایستی از نو به تعیین حدود و ثغور مزارع پرداخت . آیا این گفته راست است ؟ شاید . و شاید هم نه .

آنچه مسلم است وجود هرمهای مصر وقوف بر ریاضیات ، به ویژه هندسه ، را روشن می‌سازد . هرمها آیاتی از ریاضیاتند در حد اعجاز . اندازه‌های آنها چنان به دقت حساب شده است که جز بر پایهٔ یک رشته مطالعات ممتد و بسیار دقیق نمی‌توانند قرار داشته باشند . مگر نه آن است که در پنجاه قرن پیش ساختمانی به شکل هرم ساختند که قاعدهٔ آن مربعی عظیم بر روی زمین است و خط‌الرأسهای آن در ارتفاعی بیشتر از صد متر متقارب می‌شوند ؟ و مگر این کار بی‌دانش ریاضی میسر است ؟

اما در مصر هندسه جنبهٔ عملی داشت و کاربرد آن مورد توجه بود . بابلیان هم ، که در سرزمینی به‌شکل هلال میان دجله و فرات تمدنی عظیم به‌وجود آوردند ، به اصول هندسه وقوف داشتند . اما در میان گرایش این دو قوم (مصریان و بابلیان) به هندسه تفاوتی عظیم بود . مصریان هرمها را به وجود آوردند تا خداوندگارانشان ، یعنی فرعونان ، پس از مرگ در آنها بیارامند و زندگی جاودانی پس از مرگ را با آسودگی بگذرانند ، ولی بابلیان باغهای آویخته ، یا حدائق معلقه ، را که یکی از عجایب هفتگانهٔ آن زمان بود ، ساختند تا پادشاهانشان به هنگام زیست از آنها برخوردار شوند .

هندسه‌دانان بزرگ


معبد پارتنن در آتن

خواندنی ۲

در یونان

در حدود هفت سدهٔ پیش از میلاد مسیح درهای تاریخ بر روی مصریان و بابلیان بسته می‌شوند و قومی دیگر مشعل علم را به‌دست می‌گیرد : یونانیان .

برخلاف دو قوم پیشین ، نزد یونانیان بسیار از کسانی که در پیشرفت علم ، از جمله هندسه ، کوشیدند شناخته شده‌اند و نامشان زندهٔ جاوید است ، و این خود نشانهٔ بارزی است براصالت تمدن آنان . تالس و اقلیدس و فیثاغورس را همهٔ « بچه مدرسه‌ایها » می‌شناسند وهر کس با مقدمات علم آشنا شود با اِراتُستن و ارشمیدس سروکار پیدا می‌کند . « آکادمی » افلاطون که بزرگترین مرکز آموزش ریاضی بود و بربالای سر دَرِ ورودی آن نوشته شده بود « هر کس هندسه نمی‌داند وارد نشود » در ردیف دانشگاههای بزرگ امروز ، مانند آکسفورد و هاروارد و گوتینگن شناخته می‌شود .

دانشگاه بزرگ اسکندریه ، که معروف است قیصر روم پس از فتح این شهر کتابخانهٔ آنْ را با نیم میلیون کتاب خطی به دست آتش‌کین و نادانی سپرد ، نشانهٔ دیگری برخدمت آن قوم به علم بشری است .

برروی هم بررسی تاریخ چند قرنی که دورهٔ زرین تمدن یونانی را تشکیل می‌دهند نشان می‌دهد که دانش آنان پدیده‌ای استثنایی در تاریخ علم است و پیشرفت دانش در آن دوره با ترقی علم در قرنهای نوزدهم و بیستم قابل مقایسه است .

تاریخ علم از خدمات دانشمندان قدیم شواهد بسیار دارد . چنان‌که اگر بخواهیم تنها نامهای آنهایی راکه در این راه کوشیده‌اند ذکر کنیم ، زمانی دراز لازم خواهد بود واگر بخواهیم حق آنان را اداکنیم ، صدها تن باید در تدوین میلیونها صفحه در هزارها جلد کتاب بکوشند.


اقلیدس

هندسه‌دانان بزرگ

۳
خواندنی

اقلیدس (Euclide)

در بارهٔ زندگی این مرد بزرگ چیز زیادی نمی‌دانیم. در اواخر قرن چهارم پیش از میلاد متولد شد ، در آکادمی افلاطون تحصیل کرد، پس از آن که بطلمیوس، سردار وجانشین اسکندر، دانشگاه اسکندریه را به‌وجود آورد به‌دعوت وی برای تدریس به‌اسکندریه رفت و آنجا بود تا مرد.

از اقلیدس مانند هر بزرگ مرد دیگری که حقیقت زندگانیش در ابرهای ابهام فرورفته است ، افسانه‌ها برجای مانده است . از جمله یکی این که ، روزی یکی از شاگردانش پرسد که « براین همه هندسه آموختن وقضیه ثابت کردن چه نفعی مُترَتِّب است ؟ » واقلیدس به غلامش گفت « به این جوان پولی بده تا از هندسه خواندن نفعی برده باشد . » یك بارهم فرزند بطلمیوس فرمانروای مصر، که در دانشگاه اسکندریه نزد استاد درس می‌خواند پرسید که « آیا راه آسانتری برای یادگرفتن هندسه پیدا نمی‌شود ؟ » اقلیدس جواب داد « برای فراگرفتن علم راه شاهانه وجود ندارد، برو دُرُست را بخوان » .

کار اصلی اقلیدس ، یعنی شاهکار او ، مُدَوَّن ساختن و تنظیم کردن هندسه بود. پیش از او دراین باره زیاد کار کرده بودند . فیثاغورس وتالس ، که دوسه قرن پیش از او می‌زیسته‌اند ، دو نمونهٔ برجسته از کسانی هستند که در هندسه کار کرده بودند . اقلیدس کارهای پیشینیان را گرد آورد ، خود چیزها به آن افزود و همه را برمبنای اصول موضوع و متعارفی خود چنان منظم و مرتب کرد که قرنها بهترین نمونهٔ کار علمی شمرده می‌شد . نتیجهٔ کارهای او کتاب اصول « Eléments » بود که درقرن پانزدهم که ماشین چاپ اختراع شد از اولین کتابهایی بود که به‌چاپ رسیدند .


ارشمیدس

هندسه دانان بزرگ

۴

خواندنی

ارشمیدس (Archimède)

ارشمیدس بزرگترین ، یا دست کم یکی از بزرگترین ، پروردگان دانشگاه اسکندریه بود . در حدود ۲۸۷ سال پیش از میلاد مسیح در سیراکوز ، پایتخت سیسیل ، چشم به دنیا گشود . پدرش فئیدیاس منجم و ریاضی‌دان بود . اندکی پس از آن‌که اقلیدس در دانشگاه اسکندریه به‌تدریس پرداخت ارشمیدس برای تحصیل به آنجا رفت . پس از تحصیل به سیراکوز بازگشت و تمام عمر را درآنجا بود . با کُنُن و دُری‌تیوس و اراتوسْتِنْ ، دانشمندان اسکندری ، با مکاتبه ارتباط داشت . با آن که دل به ریاضیات نظری سپرده بود ، به ریاضیات عملی هم می‌پرداخت و به سال ۲۱۲ پیش از میلاد که مارسلوس ، سردار رومی ، سیراکوز را محاصره کرده بود ، همهٔ نبوغ فکری خودرا درخدمت دفاع ازشهر گذاشت و بااختراع سلاحهای دفاعی سهمگین دشمن نیرومند را در هم شکست و متواری ساخت . هیچ مطلب علمی در نظر او کوچك جلوه نمی کرد و با نهایت دقت به حل هر مسئله دل می‌داد. داستان تاج هیرون، پادشاه سیسیل، که ارشمیدس نزدش تقرب بسیار داشت ، معروف است . پادشاه به زرگری فرمان داد تا تاجی از طلای ناب برایش بسازد. بعد به‌کار زرگر بدگمان شد و از ارشمیدس خواست تا راهی پیدا کندکه بی‌خراب کردن تاج از درستی یا نادرستی زرگر مطمئن شود . ارشمیدس در این باره می‌اندیشید ، تا وقتی که در خزانهٔ حمام قانون فیزیکی « هر جسم در داخل هر مایع بـه اندازهٔ وزن مایع هم حجمش سبك می‌شود » را کشف کرد . این کشف ، که کلید حل مسئله بود ، چنان دانشمند را مجذوب ساخت که برهنه از حمام بیرون دوید « درکوی و برزن می‌دوید و فریاد می کرد « اورکا ، اورِکا » یعنی « یافتم ، یافتم » .

ارشمیدس قدرت تمرکز حواس بسیار داشت و وقتی کـه دقت خود را به حل مسئله‌ای معطوف می‌ساخت از آنچه در اطرافش می گذشت بی‌خبر می‌ماند . از این روی ، وقتی کـه

رومیان از راه خشکی و به‌طور غیرمستقیم به جزیرهٔ سیسیل حمله بردند و در روزی که مردم شهر در کار برگزاری یك جشن بزرگ مذهبی بودند شهر را گشودند، سربازی به ارشمیدس که مشغول حل مسئله‌ای بر روی ریگهای زمین بود، نزدیك شد. ارشمیدس که غرق دریای فکر بود متوجه نزدیك شدن او نشد و وقتی که سایهٔ او را بر روی شکلی که روی ریگها کشیده بود دید از او خواست که دور شود و «سایه‌اش را از سر او کم کند». سرباز رومی برآشفت و شمشیر خود را در بدن دانشمند هفتاد و پنج ساله فرو برد و او را کشت.

اختراعات ارشمیدس بسیار است. در هندسه نسبت محیط دایره به قطر آن را بـه کمك خواص چندضلعیهای محیطی ومحاطی منتظم حساب کرد و وقتی که تا نود وشش ضلعی محاطی پیش رفت مقدار عدد π را بین $۳\frac{۱}{۷}$ و $۳\frac{۱۰}{۷۱}$ به‌دست آورد.

ارشمیدس و نیوتن انگلیسی و گوس آلمانی، سه بزرگترین ریاضی‌دانان قرون و اعصار شناخته شده‌اند.



فیثاغورس

هندسه‌دانان بزرگ



خواندنی ۵

فیثاغورس (Pythagoras)

فیثاغورس، که به وسیلهٔ قضیهٔ معروفش در مثلث قائم‌الزاویه و رابطهٔ مهمی که بین عددهای متناسب با ۳، ۴ و ۵، معروف به عددهای فیثاغورسی، کشف کرده است، نزد همهٔ کسانی که دورهٔ دبیرستانی را گذرانده‌اند معروف است، در ۵۸۰ سال پیش از میلاد مسیح در ساموس (یونان) قدم به میدان هستی گذاشت. وقتی او شروع به آموختن ریاضی کرد ریاضیات در حقیقت علم شمرده نمی‌شد و او بود که با کوشش پی‌گیر خود ریاضیات را به جایی رسانید که علم محسوب شود.

ظاهراً فیثاغورس شاگرد تالس بوده و عدد و اعمال با آن را از او فراگرفته است. وی و پیروانش بسیار به عدد معتقد بودند و آن را مبنای همه چیز می‌دانستند، یعنی در حقیقت عدد را می‌پرستیدند.

پس از آن که تا حد امکان در یونان آموخت به مصر و بابل رفت تا هندسه بیاموزد. آن‌گاه به یونان باز گشت. اما چون کشور را در اشغال دیگران و وضع آن را سخت نابسامان دید به‌مستعمرهٔ یونانی به نام کروتونا در جنوب ایتالیا رفت و در آنجا مدرسه‌ای تأسیس کرد که شباهتی به مدارس دیگر نداشت و استفاده از آن منوط به شرایطی خاص بود.

فیثاغورس در بارهٔ عددمعتقدات خرافی داشت. یك را مظهر عقل و ۲ را نشانهٔ تصمیم و ۴ را علامت عدالت می‌دانست. عددهای جفت را ماده و عددهای فرد را نر می‌شناخت. همچنین عددهای زوج را سعد و عددهای فرد را نحس تصور می‌کرد و از این قبیل. اما در بارهٔ عددکارهای علمی بسیار هم کرده است. در عددهای اول مطالعاتی داشت. کار او درتعیین عددهای کامل (یعنی آنهایی که مساوی مجموع مقسوم‌علیه‌های خود هستند، مانند ۶ که مساوی ۳+۲+۱ است) و عددهای دوستدارِ هم یا مُتَحابّه (که هر یك از آنها برابر است با مجموع

مقسوم‌علیه‌های دیگری، مانند ۲۸۴ و ۲۲۰) شایان توجه است. یونانیها فقط یك جفت عدد دوستدارهم می‌شناختند (همان ۲۲۰ و ۲۸۴) . یك جفت دیگر ۱۷۲۹۶ و ۱۸۴۱۶ در سال ۱۰۱۴ هجری (۱۶۳۶ میلادی) شناخته شد. امروز بیش از ۴۰۰ جفت آنها شناخته شده‌اند. اما هنوز معلوم نیست که تعداد این گونه عددها محدود است یا نامحدود .

باید دانست که در نظر یونانیان هندسه همان عدد بود که به صورت شکل درآمده بود. اندازهٔ پاره‌خط عدد بود و وقتی که پاره‌خط درازتر یا کوتاهتر می‌شد، عدد بزرگتر یا کوچکتر می‌گردید. اما عددی که یونانیان می‌شناختند عدد طبیعی بود، یعنی همان که به طور طبیعی برای شمردن به کار می‌رود. از عدد علامتدار (مثبت و منفی) و عدد کسری و عدد گنگ هیچ نمی‌دانستند. فیثاغورس به عدد گنگ برخورد و آن هنگامی بود که می‌خواست وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای را که دوضلعش در دست بود حساب کند و به عددهایی مانند $\sqrt{2}$ و $\sqrt{5}$ می‌رسید. وی و پیروانش کوشیدند که وجود این گونه عددها را پنهان نگاه دارند، زیرا که پذیرفته شدن آنها به عنوان عدد کاخ عظیمی را که برای اعداد ساخته بودند ویران می‌کرد. اما این کاخ ویران شدنی بود و پیشرفت آدمیان با گذشت زمان انواع عددها را به عالم ریاضی وارد کرد.

هندسه‌دانان بزرگ

۶ خواندنی

تالس (Thalès)

در یونان قدیم هفت مرد دانشمند به عنوان « هفت حکیم » شناخته شده بودند و مردم را رهبری می‌کردند. یکی از آنان تالس مَلَطی بود[1] که در جزیرهٔ ملطه (Miletus) متولد شده بود. سال تولدش به تخمین ۶۲۵ پیش از میلاد بوده است. بدین دلیل که بنا بر روایت هرودُت وی کسوفی را به دقت پیش‌بینی کرده بود که گویا کسوف روز ۲۸ ماه مه سال ۵۸۵ پیش از میلاد بوده است و چون برای این کار بایستی در حدود چهل سال از سن او گذشته باشد، تولد او را به سال ۶۲۵ قبل از میلاد حدس می‌زنند.

تالس در ۷۰ سالگی بین سالهای ۵۴۸ تا ۵۴۵ پیش از میلاد درگذشت. وی از نظر اجتماعی در هموطنان خود نفوذ بسیار داشته است.

برای دیدن و آموختن به مصر رفت و در آنجا هندسه آموخت و کوشش بسیار کرد تا جایی که از معلمان خود پیش افتاد و توانست بلندی هرمهای مصر را تعیین کند. همچنین فاصلهٔ کشتی از ساحل را اندازه گرفت.

اثبات پنج قضیهٔ هندسه را به تالس نسبت می‌دهند. این قضایا عبارتند از:

۱ـ قطر دایره را نصف می‌کند.

۲ـ دو زاویهٔ مجاور به قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین متساویند.

۳ـ دو زاویهٔ متقابل به رأس متساویند.

۴ـ زاویهٔ محاط در نصف دایره یک قائمه است.

۵ـ هرگاه قاعدهٔ مثلث و دو زاویهٔ مجاور به آن داده شده باشند، مثلث مشخص است.

افلاطون می‌گوید: « وقتی تالس چشم به آسمان دوخته بود تا قاعدهٔ حرکت ستاره‌ها را کشف کند، چاهی را که جلو پایش بود ندید و در آن افتاد و این پیش‌آمد موجب مسخره کردن او شد که: جلو پایش را نمی‌بیند و می‌خواهد آسمانها را ببیند. »

ارسطو نقل می‌کند که: « تالس از دانش خود به سود مادی خویش و به ضرر دیگران استفاده می‌کرد » و نتیجه می‌گیرد که علم همیشه با اخلاق قرین نیست.

۱ـ شش حکیم دیگر عبارت بودند از: پِتیاکوس، بیاس، کِلئوبول، پریاندر، خیلون وسولون



هندسهٔ نااقلیدسی و آفرینندگان آن

خواندنی

ریمان

گیورك فریدریش برنهارد ریمان[1] (۱۸۲۶ - ۱۸۶۶ میلادی) مقارن تولد هندسهٔ نااقلیدسی قدم به عرصهٔ وجود گذاشت. پس از تحصیلات مقدماتی و متوسطه به عزم تحصیل علوم اِلٰهی به دانشگاه گوتینگن روی آورد اما زود دریافت که آنچه با مذاق وی سازگاری داشت ریاضیات بود نه اِلٰهیّات. ریمان یکی از برجسته‌ترین شاگردان گوس شمرده می‌شد و بعداً به برلن رفت و در محضر استادان دیگری تَلَمُّذ کرد و در سال ۱۸۴۰ به گوتینگن بازگشت و در رشتهٔ فیزیك درجهٔ علمی گرفت.

ریمان در سال ۱۸۵۴ رساله‌ای تنظیم کرد و در آن خاطرنشان ساخت که هر چند جهان نامحدود است، بی‌پایان گرفتن آن ضرور نیست. این رساله مقدمهٔ هندسهٔ نااقلیدسی جدیدی بود. وی ریاضیات را از قید سُنّتها آزاد ساخت و بنیاد هندسه را نیز بر بی‌نهایت کوچکها گذاشت و هندسهٔ دیفرانسیل را طرح کرد. پژوهشهای ریمان را هلمهتز[2] و لی[3] و بل‌ترامی[4] دنبال کردند و نفر اخیر ثابت کرد که هندسهٔ نااقلیدسی دستگاهی است سازگار. حقیقت آن که بلیایی و لباچفسکی هرقدر در کار خود پیش رفتند با ناسازگاری دستگاه روبه‌رو نشدند اما به‌طور مُنَجَّز هم سازگار بودن آن را ثابت نکردند. هندسهٔ ریمانی با هندسهٔ بلیایی و لباچفسکی فرق بارز دارد، مثلاً آنان به رسم بیشتر از یك خط به موازات خط معین از نقطهٔ معین قائل بودند، اما ریمان توازی را انکار کرد. یا این که آنها مجموع زاویه‌های مثلث را کوچکتر از دو قائمه گرفتند و ریمان بزرگتر از آن.

هندسهٔ نااقلیدسی بلیایی و لباچفسکی را هندسهٔ هُذلولَوی (هیپربولیك[5]) و هندسهٔ ریمان را هندسهٔ بیضوی (اِلّیپتیك[6]) نامیده‌اند.

۱- Friedrich Bernhard Riemann ۲- Holmhottz ۳- Lee
۴- Beltrami ۵- Hyperbolic ۶- Elliptic


خواندنی

هیلبرت ، ریاضی‌دان سازنده

داوید هیلبرت (۱۸۶۲–۱۹۴۳) درخانوادهٔ متوسطی در کونیگسبرگ متولد شد و درجهٔ دکترای خود را ازدانشگاه همان شهرگرفت. وی از ریاضی‌دانان بسیارعالی‌قدر بود ودررشته‌های مختلف آثاری برجای نهادکه مورد قبول جهانی است . دراینجا ما فقط به‌کاری که درهندسه کرده است اشاره می کنیم .

هیلبرت درسال ۱۸۹۹ کتابی به نام «اصول هندسه» منتشر کرد ومکتبی بـه وجودآورد که می‌توان‌آن را مکتب اصل‌گرایان نامید . وی این اصل مهم را روشن ساخت که درریاضیات ماهیت خاص موجودهای ریاضی اهمیتی ندارند وآنچه مهم است روابط میان‌آنهاست .

هیلبرت برخلاف اقلیدس سعی بیهوده درتعریف نقطه ، خط ، صفحه ، فضا ، . . . ، ننمود بلکه‌آنها را بعنوان مفاهیم نخستین درعلم هندسه تعریف نشده پذیرفت . زیرا هرگونه تعریفی برای این مفاهیم متکی برتجربه است ومغایربا روش مبتنی براصول ، درهندسه است . هیلبرت از تقسیم اصول به انواع موضوعه ومتعارف اجتناب کردوهمهٔ آنها را اصول نامید ، زیرا اصول قابل‌اثبات نیستند ومیزان بدیهی بودن‌آنها از فردی به فرد دیگر تغییر می کند ، بعبارت دیگر مطلبی که برای یك فرد بدیهی است ممکن‌است برای فرد دیگر بدیهی نباشد . نقاط ، خطوط و صفحات بوسیلهٔ اصول ارتباط (گذر) ، بینت (نظم) ، وهمنهشتی (هم‌اندازه) بیکدیگر وابسته‌اند :

هرگاه خط d به نقطه A وابسته باشد می گویند ، «d برA می گذرد» یـا «A بر d واقع است» همچنین اگرنقطهٔ A به صفحه P وابسته باشد می‌گویند ، «A برP واقع است» یا «P به A می گذرد» .

البته بکمك نظریهٔ مجموعه‌ها می‌توان برخی ازمفاهیم تعریف نشده را نیز بزبان مجموعه‌ها تعریف کرد . مثلا واقع شدن نقطه برخط ، باگذشتن خط برنقطه به معنای تعلق نقطه برمجموعه نمایش خط است .

اصول هیلبرت برای هندسهٔ اقلیدسی

اصول هیلبرت برای هندسهٔ اقلیدسی به پنج‌گروه بشرح زیر تقسیم شده است .

گروه I ـ اصول ارتباط (گذر) .

اصلهای ۱ و ۲ - ازدونقطهٔ متمایزیك خط ، وفقط یك خط می گذرد .

اصل ۳ - برهرخط دست کم دونقطه وجود دارند ، درهرصفحه دست کـم سه نقطه وجود دارند که بریك خط راست نباشند .

اصلهای ۴ و ۵ - ازهرسه نقطهٔ غیرواقع بریك خط راست یك صفحه ، وفقط یك صفحه می گذرد .

اصل ۶ - اگر دونقطهٔ خطی ، درصفحه‌ای باشند ، تمام‌آن خط درآن صفحه است .

اصل ۷ - اگردوصفحه یك نقطهٔ مشترك داشته باشند ، دست کـم یك نقطهٔ مشترك دیگر هم خواهند داشت .

اصل ۸ - دست کم چهار نقطه وجود دارند که دریك صفحه نیستند .

گروه II - اصول بینت (نظم)

اصل ۹ - هرگاه A و B و C سه نقطه واقع بـر یك خط باشند و C بین A و B باشد ، C بین B و A نیز هست .

اصل ۱۰ - هرگاه A و B دونقطه واقع برخطی باشند ، دست کم یك نقطهٔ دیگر بین آنها بر آن خط واقع است .

اصل ۱۱ - ازهرسه نقطه واقع بریك خط ، فقط یکی ازآنها بین دوتای دیگر قرار دارد . (هردونقطه یك پاره خط را مشخص می کنند ؛ دونقطه دوانتهای پاره خط هستند و هرنقطه بین آنها یك نقطه ازپاره خط است .)

اصل ۱۲ - (اصل پاش)- هرگاه A و B و C سه نقطهٔ غیرواقع بریك‌خط راست‌ازصفحه‌ای باشند وخط d واقع درآن صفحه برهیچ یك ازسه نقطه نگذرد ویکی‌ازپاره خطها ، مثلا AB، را بین A و B قطع کند یکی از دوتای دیگـر ، یعنی یا AC را بین A و C یا BC را بین B و C قطع می کند .

گروه III - اصول همنهشتی (هم‌اندازگی)

اصل ۱۳ - هرگاه A و B دو نقطه ازخط d باشند و A′ یك نقطهٔ دیگرازهمان خط یا‌یك نقطه‌ازخط دیگری مانند d′ باشد، برروی d و d′ و دریك‌طرف A′ یك، وفقط یك‌نقطه‌دیگر مانند B′ یافت می‌شود به قسمی که AA′ مساوی AB باشد. (هرپاره خط باخودش مساوی است) .

اصل ۱۴ - هرگاه پاره خط A′B′ با پاره خط AB هم‌نهشت(هـم‌اندازه) باشد و نیز A″B″ با AB هم‌نهشت باشد ، A′B′ با A″B″ هم نهشت است .

اصل ۱۵ - هرگاه دو پاره خط AB و BC واقـع برخط d فقط در B مشترك باشند و دو پاره خط A′B′ و B′C′ واقع بر همان خط d یا خط دیگر d′ فقط در B′ مشترك باشند درصورتی که A′B′ با AB و B′C′ با BC هم‌نهشت باشند ، A′C′ هم با AC هم‌نهشت است.

اصل ۱۶ - هرگاه زاویه (k و b) درصفحهٔ π وخطی مانند d' در همان صفحه یا صفحه دیگری مانند π'، ونقطهٔ O' بر d' ونیم خط b' به مبدأ O' واقع بر d' مفروض باشند، در π یا π' ابتدا از O' یك وفقط یك نیم خط k' می‌توان رسم کرد چنان که زاویهٔ (k' و b') با زاویهٔ (k و b) هم‌نهشت باشد و داخل زاویه در یك طرف مشخص خط d' واقع باشد.

اصل ۱۷ - اگر زاویهٔ (k و b) با زاویهٔ (k' و b') و زاویهٔ (k' و b') با زاویهٔ (K'' و b'') هم‌نهشت باشند زاویهٔ (k و b) با زاویهٔ (k'' و b'') هم نهشت است.

اصل ۱۸ - هرگاه AB و AC وزاویهٔ BAC ازمثلث ABC به ترتیب با $A'B'$ و $A'C'$ وزاویهٔ $B'A'C'$ ازمثلث $A'B'C'$ هم‌نهشت باشند، زاویهٔ ABC هم با زاویهٔ $A'B'C'$ هم نهشت خواهد بود (از این اصل برای تساوی دومثلث استفاده می‌شود).

گروه IV - اصول پیوستگی (کمان خطی)

اصل ۱۹ - بردستگاه نقاط واقع بریك خط نمی‌توان نقاطی افزود چنان که دستگاه گسترش یافته هندسه‌ای به وجود آورد که در آن همهٔ اصلهای موضوع پیش گفته صادق باشد.

اصل ۲۰ - (اصل ارشمیدس) - هرگاه دوپاره خط AB و CD مفروض باشند آنگاه نقاط A_1 و A_2 و . . . . و A_n بر خط AB چنان یافت می‌شوند که پاره خطهای AA_1 و A_1A_2 و.... و A_nA_{n-1} هم اندازه باشند و نقطهٔ B بین A_{n-1} و A_n قرارگیرد.

اصل کانتور - فرض کنیم برهرخط d یك دنبالهٔ بینهایت از پاره خطهای A_1B_1 و A_2B_2 و... داده شده باشند که درآن هریك از پاره خطها درون پاره خط قبلی واقع شود. باز فرض کنیم که بازای هرپاره خط، عددی مانند n وجود داشته باشد بطوریکه A_nB_n کوچکتر از این پاره خط باشد، آنگاه نقطه‌ای مانند x وجود دارد که درون هریك از پاره خطهای A_1B_1 و A_2B_2 و... واقع شود (نتیجه می‌شود که نقطهٔ x منحصر بفرد است).

بکمك اصل ارشمیدس واصل کانتور ثابت می‌شود که یك رابطه یك بیك بین نقاط یك خط و مجموعهٔ اعداد حقیقی وجود دارد وازآنجا می‌توان اندازهٔ یك پاره خط را تعریف کرد.

